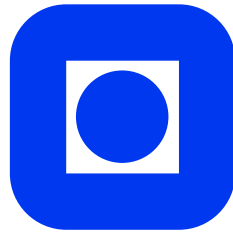


HOVEDOPPGAVE

Passivitets-basert regulatordesign av mekaniske
oscillatoriske systemer ved bruk av LQG og
H-uendelig.

Anders Lund



*Institutt for teknisk kybernetikk
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)*

Trondheim

18. desember 1996

Passivitets-basert regulatordesign av mekaniske
oscillatoriske systemer ved bruk av LQG og H-uendelig.

Forord

Denne hovedoppgaven ble utført høsten 1996 ved Institutt for teknisk kybernetikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, med professor Olav Egeland som faglærer.

Veileder under arbeidet med oppgaven har vært Erling Aarsand Johannessen, som jeg vil rette en stor takk til. Tilsynelatende alltid tilgjengelig for spørsmål av enhver art, og alltid ett eller annet tips å komme med.

Oppgaven har vært av teoretisk art, og gav god innsikt i problemstillinger som jeg fra før av ikke har drevet så mye med.

Trondheim, 18. desember 1996

Anders Lund

Innhold

Nomenklatur	ix
Sammendrag	xi
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Generelt om \mathcal{H}_2 (LQG) og \mathcal{H}_∞	1
1.3 Rapportens oppbygging	2
2 Syntese av passive regulatorer ved bruk av Riccati-ligninger	4
2.1 System	4
2.2 Regulatorproblem	5
2.3 \mathcal{H}_2 regulering	6
2.4 \mathcal{H}_∞ regulering	8
3 Syntese av passive regulatorer ved bruk av matriseulikheter	10
3.1 System	11
3.2 \mathcal{H}_2 -regulering	12
3.3 Generell multikanal regulering	14
3.4 Krav til passivitet i en kanal	15
3.5 Passivitetskrav fra virtuell utgang til pådrag	15
4 Mekanisk oscillatorisk system: Skip med stigerør og ROV	19
4.1 Sideveis bevegelse for skip med stigerør og ROV	19
4.1.1 ROVens bevegelsesligning	20
4.1.2 Kabelens bevegelsesligning	21

4.1.3	Bevegelsesligning i normale koordinater	22
4.1.4	Totalsystem	24
4.1.5	Kommentar til normalisering	25
4.2	Tilstandsrommodell for sideveis bevegelse	27
4.3	Numeriske verdier for systemet	27
5	Passivitets-basert regulatordesig og simuleringsresultater	30
5.1	Egenskaper ved systemet	30
5.2	Regulatorstruktur	32
5.3	Simuleringsresultater	33
5.3.1	Fast γ og egendefinert BIGM	34
5.3.2	Fast γ og uendret BIGM	41
6	Diskusjon og konklusjon	44
6.1	Diskusjon av simuleringsresultater	44
6.1.1	Fast γ og egendefinert BIGM	44
6.1.2	Fast γ og uendret BIGM	45
6.2	Konklusjon og forslag til videre arbeid	45
	Referanser	47
A	Passivitet	49
A.1	Definisjoner og nyttige resultater	49
A.2	Positiv reelle systemer	50
B	Lineære matriseulikheter	53
B.1	Beskrivelse av \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -norm ved bruk av LMI	54
B.2	Beskrivelse av passivitet ved bruk av LMI	55
C	Blokkskjema brukt i Simulink	56
D	Matlab-kode	58

Tabeller

4.1	Numeriske data for kabel/stigerør.	28
4.2	Numeriske data for ROV.	28
4.3	Numeriske data for hav og bølger.	28
5.1	Verdier som angir hvor mye de enkelte tilstandene og pådraget skal vektlegges i \mathcal{H}_∞ -normen.	32

Figurer

2.1	System med regulator	5
3.1	Multikanal system med regulator.	11
4.1	Prinsippskisse for system bestående av skip, kabel og ROV.	20
4.2	Svingesystem bestående av masse, fjær og demper.	26
4.3	Forstyrrelsesfunksjon f_i	29
4.4	Generert trajektor for posisjonsreferansen.	29
5.1	Plott av transferfunksjonene fra pådraget u_{t_x} til henholdsvis posisjonen η_x og hastigheten $\dot{\eta}_x$	31
5.2	Filstruktur for generering av regulator.	33
5.3	Blokkskjema for den serielle koblingen mellom $-\mathbf{K}$ og \mathbf{T}_{yu} , som danner sløfjetransferfunksjonen \mathbf{H}_0	34
5.4	Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 15.9$	35
5.5	Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 15.95$	36
5.6	Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 16$	37
5.7	Transferfunksjonen \mathbf{T}_{-uz_2}	37
5.8	Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den lineariserte modellen.	38
5.9	Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 15.95$	39
5.10	Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 15.9$	39
5.11	Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 16$	40
5.12	Slack-verdi ved jevnt økende verdier for γ	40

5.13	Første verdi i \mathbf{B}_c ved økende verdier for γ	41
5.14	Første verdi i \mathbf{B}_c ved økende verdier for γ . (Uendret BIGM.)	42
5.15	Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)	42
5.16	Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)	43
5.17	Transferfunksjonen \mathbf{T}_{-uz_2} for $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)	43
A.1	Asymptotisk stabilt totalsystem.	50
C.1	Blokkskjema for simulering av det lineariserte systemet i Simulink.	56
C.2	Blokkskjema for simulering av det ulineære systemet i Simulink. .	57

Nomenklatur

- Matriser skrives med store, fete bokstaver i kursiv. (F.eks. \mathbf{A} .)
- Vektorer skrives med små, fete bokstaver i kursiv. (F.eks. \mathbf{x} .)
- $*$ angir komplekskonjugert variabel. (F.eks. s^* .)
- \mathbf{I} er identitetsmatrisen.
- $\dot{\mathbf{x}}$ er den tidsderiverte av \mathbf{x} .
- \mathbf{T}_{yu} er transferfunksjonsmatrisen fra \mathbf{u} til \mathbf{y} .
- \mathbf{A}^T er den transponerte matrisen til \mathbf{A} .
- $\text{trace}(\mathbf{A})$ er trasen til \mathbf{A} .
- $\text{diag}(a, b)$ er en diagonal matrise med a og b på diagonalen.
- $\text{Re}(s)$ er realdelen til det komplekse tallet s .
- $\|\cdot\|_2$ angir \mathcal{H}_2 -normen.
- $\|\cdot\|_\infty$ angir \mathcal{H}_∞ -normen.
- $\bar{\sigma}(\cdot)$ angir øvre singularverdi.
- $\rho(\cdot)$ angir spektralradiusen.
- $\text{sup}(\cdot)$ angir supremum.
- \exists angir *eksisterer*.
- \in angir *med i mengden*.
- \forall angir *for alle*.
- $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$ angir transferfunksjonen $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$.

-
- Av og til skrives bare *transferfunksjon* i stedet for *transferfunksjonsmatrise*, men om dette er en matrise eller ei vil framkomme av den sammenhengen begrepet benyttes i.
 - Av og til utelates det at funksjoner er avhengig av den komplekse variabelen s , men at de likevel er avhengig av denne vil framkomme av den sammenhengen dette gjøres i.

Sammendrag

I denne oppgaven presenteres endel eksisterende metoder for passivitets-basert regulatordesign. En av disse metodene anvendes deretter på et mekanisk oscillatorisk system bestående av skip, stigerør og undervannsfarkost. Den matematiske modellen av systemet er for den sideveis bevegelsen, og gjennom simuleringsresultater i Matlab vises det hvordan regulatoren fungerer med dette systemet.

Syntesemetoden som anvendes er hensiktsmessig i bruk ved vårt dynamiske system. Dette skyldes at vi ved å anvende en virtuell måling av undervannsfarkostens hastighet kan utnytte allerede eksisterende informasjon om passivitet i systemet, og dermed designe en mere robust regulatorstruktur.

I regulatorsyntesen anvendes lineære matriseulikheter for beskrivelse av betingelser som regulatoren skal oppfylle. Disse kan løses ved bruk av numeriske optimaliseringsprogram. Gjennom simuleringsresultatene vises det hvordan små endringer i programvaren, som skal utføre den numeriske optimaliseringen, kan gi store utslag i resultatene. Det vises også hvordan en regulator kan eksistere selv om den strengt tatt ikke oppfyller matriseulikheterne, noe som skyldes at betingelsene uttrykker tilstrekkelige krav, ikke nødvendige.

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn

Mekanisk oscillatoriske systemer innehar ofte passivitetsegenskaper, slik at det er hensiktsmessig å utvikle passive regulatorer for å utnytte denne informasjonen til å bedre robustheten i systemet. Denne oppgaven tar utgangspunkt i dette prinsippet, men kombinerer kravene til en passiv regulator med bruken av to andre konsept: \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -regulering.

1.2 Generelt om \mathcal{H}_2 (LQG) og \mathcal{H}_∞

Begrepene \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -regulering har tilknytning til optimaliseringsteori, hvor man ønsker å optimalisere parametre med hensyn på en kostfunksjon.

\mathcal{H}_2 -regulering blir oftest referert til som LQG¹, og er egnet for å behandle stokastiske aspekter ved et system. I dette tilfellet ønsker man å minimalisere \mathcal{H}_2 -normen med hensyn på pådraget, slik at man sitter igjen med en optimal regulator.

\mathcal{H}_2 -normen er definert i frekvensplanet for en stabil transferfunksjonsmatrise $\mathbf{G}(s)$ som:

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[\mathbf{G}^T(-j\omega)\mathbf{G}(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

En minimalisering med hensyn på pådraget leder fram til *Separasjonsteoremet* (Brian D. O. Anderson & John B. Moore, 1989), hvor den optimale regulatoren inneholder løsningen av to Riccati-ligninger. Man kan se på dette som en oppdeling av det opprinnelige stokastiske systemet i en deterministisk del, som det

¹Linear Quadratic Gain

konstrueres en regulator for, og en estimeringsdel, hvor tilstandene estimeres og brukes i regulatorsyntesen.

\mathcal{H}_∞ -regulering er et mindre brukt konsept, som er egnet for å behandle robusthet for systemet. I dette tilfellet ønsker man å minimalisere \mathcal{H}_∞ -normen, slik at man sitter igjen med en regulator som har best mulig evne til å motstå modellusikkerhet.

\mathcal{H}_∞ -normen er definert i frekvensplanet for en stabil transferfunksjonsmatrise $\mathbf{G}(s)$ som:

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \quad (1.2)$$

Ved spesifiseringen av \mathcal{H}_∞ -regulering opptrer en øvre skranke i form av en gammaverdi:

$$\|\mathbf{G}\|_\infty < \gamma \quad (1.3)$$

Her er kan \mathbf{G} være transferfunksjonen fra \mathbf{w} til \mathbf{z} , slik at $\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{w}$. Gammaverdien kan sees i sammenheng med modellusikkerheten, ved at denne usikkerheten beskrives ved $\mathbf{w} = \mathbf{\Delta}\mathbf{z}$. Antas usikkerheten å ha inkrementell forsterkning ikke høyere enn $1/\gamma$ får vi ved å anvende *Small-gain* teoremet (Michael Green & David J. N. Limebeer, 1995) ligning (1.3).

Med dette utgangspunktet kan vi uformelt tolke gamma på følgende vis:

- Stor γ gir rom for liten usikkerhet i modellen.
- Liten γ gir rom for stor usikkerhet i modellen.

Tilfredsstilles ligning (1.3) med en liten gammaverdi, vil vi ha en regulator som godtar størst mulig modellusikkerhet.

1.3 Rapportens oppbygging

Rapporten er organisert i følgende hovedkapittel:

- **Kapittel 2:**
Her gis en oversikt over syntese av passive \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -regulatorer basert på bruk av algebraiske Riccati-ligninger i løsningen.
- **Kapittel 3:**
Her gis en oversikt over syntese av passive \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -regulatorer basert på bruk av lineære matriseulikheter i løsningen.

- **Kapittel 4:**
Her utvikles en matematisk modell for sideveis (lateral) bevegelse av et system bestående av overflateskip, stigerør/kabel og ROV².
- **Kapittel 5:**
Her presenteres egenskaper ved den matematiske modellen, regulatorstruktur og simuleringsresultater.
- **Kapittel 6:**
Her diskuteres resultatene, og en konklusjon på oppgaven blir gitt.

²Remotely Operated Vehicle

Kapittel 2

Syntese av passive regulatorer ved bruk av Riccati-ligninger

Fra teorien omkring optimalregulering (Brian D. O. Anderson & John B. Moore, 1989) vet vi at vi kan minimalisere en kostfunksjon slik at kravene til en optimal regulator framkommer. Resultatet er at regulatoren inneholder parametre som er løsningen til *algebraiske Riccati-ligninger* (ARE¹).

I den påfølgende presentasjonen, som er basert på Johannessen (1995), skal vi se på en utvidelse av begrepet optimal regulator design. I tillegg til å finne en optimal regulator vil vi nå kreve at regulatoren også skal være passiv. For en kort introduksjon til begrepet passivitet, med tilhørende definisjoner, se Vedlegg A.

2.1 System

La oss ta utgangspunkt i det lineære, tidsinvariante (LTI) systemet Σ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

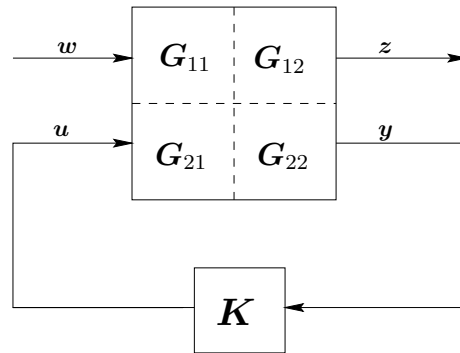
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \quad (2.3)$$

For dette systemet kan vi anvende notasjonen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Et blokkskjema som viser dette systemet med en regulator er vist på Figur 2.1.

¹Algebraic Riccati Equation



Figur 2.1: System med regulator

I systemet har vi:

- \mathbf{x} er systemets tilstandsvektor
- \mathbf{w} er alle eksterne innganger (referanser, forstyrrelser, målestøy, o.l.)
- \mathbf{u} er systemets pådrag
- \mathbf{z} er de signalene vi ønsker å regulere på (f.eks. reguleringsavvik)
- \mathbf{y} er målte variable

For dette systemet vil vi kunne finne den lukkede sløyfes transferfunksjonsmatrise fra \mathbf{w} til \mathbf{z} , betegnet $\mathbf{T}_{zw}(s)$, som

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}_{21} \quad (2.5)$$

der $\mathbf{G}_{ij}(s)$ er gitt ved

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{C}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{D}_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_i \\ \hline \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_{ij} \end{array} \right) \quad (2.6)$$

2.2 Regulatorproblem

Vårt neste mål, nå som systemets struktur er klarlagt, er å finne passive regulatorer ved å anvende \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -norm som kriterier. Disse regulatorene vil bli konstruert ved å anvende algebraiske Riccati-ligninger, samt bruk av Kalman-Yakubovitch lemmaet (Lemma A.1) for å påvise passivitet.

Vårt utgangspunkt er systemet som ble spesifisert i forrige underkapittel, men med følgende antakelser i tillegg:

A.1 $D_{11} = D_{22} = 0$

A.2 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ er stabiliserbar og $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$ er detekterbar.

A.3 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ er stabiliserbar og $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ er detekterbar.

A.4 $D_{12}^T (\mathbf{C}_1 \quad D_{12}) = (\mathbf{0} \quad \mathbf{R})$

A.5 $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$

A.6 Transferfunksjonsmatrisa $\mathbf{G}_{22}(s)$ er positiv reell, dvs. $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ og $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, slik at (Lemma A.1)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} = \mathbf{C}_2 \quad (2.8)$$

Etter at en regulator er konstruert vil den være på formen

$$\mathbf{u} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \end{array} \right) \mathbf{y} = \mathbf{K}(s) \mathbf{y} \quad (2.9)$$

slik at

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{y} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{y} \quad (2.11)$$

Krav til passivitet for transferfunksjonsmatrisen fra \mathbf{y} til $-\mathbf{u}$, med bruk av regulatoren \mathbf{K} , gjør at matrisene $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_r^T > 0$ og $\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_r^T \geq 0$ må eksistere, slik at (Lemma A.1)

$$\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{A}_c + \mathbf{Q}_r = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{B}_c^T \mathbf{P}_r = -\mathbf{C}_c \quad (2.13)$$

2.3 \mathcal{H}_2 regulering

Ved \mathcal{H}_2 regulering tar vi utgangspunkt i problemet med å minimalisere $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$ med hensyn på pådraget \mathbf{u} . Fra John C. Doyle, Keith Glover, Pramod P. Khargonekar & Bruce A. Francis (1989) har vi følgende optimale regulator for slike reguleringsproblemer:

$$\mathbf{K}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (2.14)$$

der

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{L}_2 = -\mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{N}^{-1} \quad (2.17)$$

Dette tilsvarer regulatoren

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}_2 \mathbf{y} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_2 \hat{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

Her vil $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2^T \geq 0$ være løsningen av den algebraiske Riccati-ligningen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Tilsvarende vil $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2^T \geq 0$ være løsningen av den algebraiske Riccati-ligningen

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

For at denne bestemte regulatoren nå skal være passiv kan vi anvende Kalman-Yakubovitch ligningene fra (2.12) og (2.13), med $\mathbf{A}_c = \hat{\mathbf{A}}_2$, $\mathbf{B}_c = -\mathbf{L}_2$ og $\mathbf{C}_c = \mathbf{F}_2$. Dette gir oss

$$\hat{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \hat{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{Q}_r = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

$$-\mathbf{L}_2^T \mathbf{P}_r = -\mathbf{F}_2 \quad (2.23)$$

Med utgangspunkt i det som er gjort i Johannessen (1995) får vi nå følgende to alternative løsninger som gir en passiv, optimal \mathcal{H}_2 regulatorstruktur:

Alternativ 1

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{P}^{-1} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{X}_2 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_2^T = \mathbf{Y}_2 \mathbf{Q} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_2^T \quad (2.27)$$

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{Q}_b + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} = \mathbf{Q}_b + \mathbf{Y}_2^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{Y}_2^{-1} \quad (2.28)$$

hvor \mathbf{Q}_b er en valgt, positiv semidefinit matrise.

Alternativ 2

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{P} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{Y}_2^{-1} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{Q} + \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \mathbf{Q}_b + \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2^{-1} \quad (2.33)$$

hvor \mathbf{Q}_b er en valgt, positiv semidefinit matrise.

Bevisene for dette finnes i Johannessen (1995), men med $\mathbf{N} = \mathbf{R} = \mathbf{I}$.

2.4 \mathcal{H}_∞ regulering

Analogt med utviklingen av \mathcal{H}_2 regulering vil vi nå se på utvikling av \mathcal{H}_∞ regulering, hvor vi tar utgangspunkt i ønsket om at regulatoren skal tilfredsstill $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$. Fra John C. Doyle et al. (1989) har vi den såkalte *central controller* som er en sub-optimal løsning på dette problemet. Den er gitt som

$$\mathbf{K}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \\ \hline \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (2.34)$$

der

$$\hat{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \quad (2.36)$$

$$\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T \mathbf{N}^{-1} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1} \quad (2.38)$$

I tillegg vil vi ha $\mathbf{X}_\infty = \mathbf{X}_\infty^T \geq 0$, $\mathbf{Y}_\infty = \mathbf{Y}_\infty^T \geq 0$ og $\rho(\mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty) < \gamma^2$, der \mathbf{X}_∞ og \mathbf{Y}_∞ er løsningene av de to algebraiske Riccati-ligningene

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_2) \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

Som i tilfellet med \mathcal{H}_2 kan vi nå trekke fram to alternative løsninger fra Johannessen (1995), som gjør denne regulatoren passiv:

Alternativ 1 Med

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{Y}_\infty = \mathbf{P}^{-1} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{Z}_\infty^{-T} \mathbf{X}_\infty \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} - \gamma^{-2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_2^T \quad (2.44)$$

vil regulatortransfermatrisa $-\mathbf{K}(s)$ være positiv reell, dersom $\mathbf{Q}_r = -(\hat{\mathbf{A}}_\infty^T \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \hat{\mathbf{A}}_\infty)$ er positiv semidefinit.

Alternativ 2 Med

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{Y}_\infty = \alpha \mathbf{P}^{-1} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{P}_r = \frac{1}{\alpha} \mathbf{Z}_\infty^{-T} \mathbf{X}_\infty \quad (2.47)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \alpha \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} - \alpha^2 (\gamma^{-2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_2^T) \quad (2.48)$$

vil krav til positiv reell regulatortransfermatrise også være oppfylt, dersom Q_r er positiv semidefinit, men med økt forsterkning.

Kapittel 3

Syntese av passive regulatorer ved bruk av matriseulikheter

Mange problemer av reguleringssteknisk art kan spesifiseres ved å anvende *lineære matriseulikheter* (LMI¹) (Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron & Venkataramanan Balakrishnan, 1994). Et eksempel på dette vil være spesifisering av ytelseskrav, som en regulator må kunne oppfylle. Ved å kombinere flere forskjellige typer krav kan man på denne måten konstruere et sett med LMier. Dette gir en mere fleksibel og nøyaktig spesifisering av den ønskede lukkede sløyfe oppførselen til systemet.

Utgangspunktet for den påfølgende presentasjonen er Carsten W. Scherer, Pascal Gahinet & Mahmoud Chilali (1995) og Scherer (1995), hvor såkalt *multi-channel* (eventuelt *multi-objective*) LMI-syntese er beskrevet. Dette gir mulighet for å spesifisere krav til passivitet for transferfunksjonsmatrisen fra inngang til utgang.

Til slutt presenteres en litt annen framgangsmåte, med krav til passivitet for transferfunksjonsmatrisen fra en virtuell utgang til pådraget. Denne presentasjonen er basert på Johannessen (1996).

Vedlegg B gir en kort oversikt over emnet lineære matriseulikheter, med en presentasjon av noen nyttige lemma vi vil få bruk for.

¹Linear Matrix Inequality

3.1 System

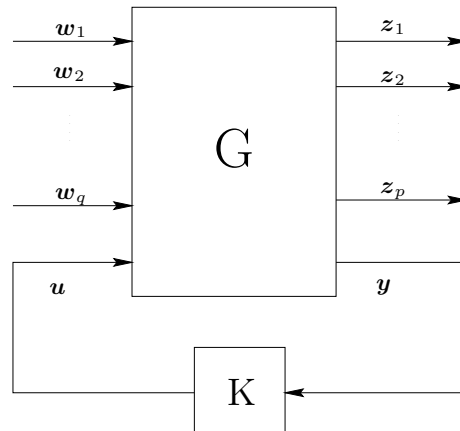
La oss ta utgangspunkt i det lineære, tidsinvariante (LTI) systemet Σ (Scherer, 1995):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{B}_q\mathbf{w}_q + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ z_1 &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{D}_{1q}\mathbf{w}_q + \mathbf{E}_1\mathbf{u} \\ &\vdots \\ z_p &= \mathbf{C}_p\mathbf{x} + \mathbf{D}_{p1}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{p2}\mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{D}_{pq}\mathbf{w}_q + \mathbf{E}_p\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{F}_q\mathbf{w}_q\end{aligned}$$

For dette systemet kan vi anvende notasjonen

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{B}_q & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \cdots & \mathbf{D}_{1q} & \mathbf{E}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{D}_{p1} & \cdots & \mathbf{D}_{pq} & \mathbf{E}_p \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{F}_1 & \cdots & \mathbf{F}_q & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_q \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Et blokkskjema for systemet med regulator er vist i Figur 3.1, der de forskjellige inngangene og utgangene er som tidligere beskrevet i underkapittel 2.1.



Figur 3.1: Multikanal system med regulator.

Vi kan se på systemet som om det har en rekke kanaler, fra den eksterne inngang \mathbf{w}_k til utgang z_j . Dette kan beskrives ved $z_j = \mathbf{T}_{jk}\mathbf{w}_k$, der \mathbf{T}_{jk} er den lukkede

sløyfes transferfunksjonsmatrise beskrevet ved

$$\begin{aligned} T_{jk}(s) &= \mathbf{C}_j(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_k + \mathbf{D}_{jk} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{C}_j & \mathbf{D}_{jk} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_c\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_c & \mathbf{B}_k + \mathbf{B}\mathbf{D}_c\mathbf{F}_k \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C} & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c\mathbf{F}_k \\ \mathbf{C}_j + \mathbf{E}_j\mathbf{D}_c\mathbf{C} & \mathbf{E}_j\mathbf{C}_c & \mathbf{D}_{jk} + \mathbf{E}_j\mathbf{D}_c\mathbf{F}_k \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Her er matrisene \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c og \mathbf{D}_c hentet fra regulatoren \mathbf{K} gitt ved

$$\mathbf{K}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right) \quad (3.3)$$

slik at $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$.

Denne regulatoren må være stabiliserende, slik at \mathbf{A} bare har egenverdier i det åpne venstre halvplan. \mathbf{A} kalles da en *Hurwitz* matrise, og det gir oss følgende antakelser for det videre arbeidet:

A.1 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) er stabiliserbar

A.2 (\mathbf{A}, \mathbf{C}) er detekterbar

3.2 \mathcal{H}_2 -regulering

For å illustrere framgangsmåten ved flerkanals LMI-syntese kan vi i første omgang konsentrere oss om en kanal, hvor vi legger inn et krav om begrenset \mathcal{H}_2 -norm.

La oss si at for kanalen fra \mathbf{w}_1 til \mathbf{z}_1 ønsker vi en \mathcal{H}_2 -norm lavere enn α :

$$\|\mathbf{T}_{11}\|_2^2 < \alpha \quad (3.4)$$

Fra Lemma B.2 vet vi at dette er tilfredsstillt, og at \mathbf{A} er stabil, hvis, og bare hvis, det eksisterer symmetriske matriser \mathbf{X}_1 og \mathbf{Z} med $\text{trace}(\mathbf{Z}) < \alpha$ og

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{A} & \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_1 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{Z} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

Dette forutsetter også at $\mathbf{D}_{11} = 0$.

Problemet med å finne en mulig løsning på disse ulikhetene blir vanskeliggjort av ulineære ledd på formen $\mathbf{A}^T\mathbf{X}_1$, siden slike ledd inneholder produkt bestående av

\mathcal{X}_1 og regulatorparametre. For å gjøre dette løsbart kan vi ved hjelp av *kongruente transformasjoner*² foreta en linearisering og endring av variable.

Først deler vi opp \mathcal{X}_1 som

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} P & M \\ M^T & X \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_1^{-1} = \begin{pmatrix} Q & N \\ N^T & Y \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

der P og Q er symmetriske matriser.

I tillegg definerer vi

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} Q & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & M^T \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

slik at vi får

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 \Pi_1 &= \begin{pmatrix} P & M \\ M^T & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} PQ + MN^T & P \\ M^T Q + XN^T & M^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & M^T \end{pmatrix} = \Pi_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Et nytt sett med variable defineres nå som

$$\hat{A} = MA_c N^T + MB_c CQ + PBC_c N^T + P(A + BD_c C)Q \quad (3.10)$$

$$\hat{B} = MB_c + PBD_c \quad (3.11)$$

$$\hat{C} = C_c N^T + D_c CQ \quad (3.12)$$

$$\hat{D} = D_c \quad (3.13)$$

Den kongruente transformasjonen består i å for- og ettermultiplisere ligningene (3.5) og (3.6) med $diag(\Pi_1^T, I)$ og $diag(\Pi_1, I)$. Dette gir

$$\begin{pmatrix} \Pi_1^T \mathcal{A}^T \mathcal{X}_1 \Pi_1 + \Pi_1^T \mathcal{X}_1 \mathcal{A} \Pi_1 & \Pi_1^T \mathcal{X}_1 \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_1^T \mathcal{X}_1 \Pi_1 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_1^T \mathcal{X}_1 \Pi_1 & \Pi_1^T \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_1 \Pi_1 & \mathcal{Z} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

De enkelte leddene i disse uttrykkene blir

$$\Pi_1^T \mathcal{X}_1 \mathcal{A} \Pi_1 = \Pi_2^T \mathcal{A} \Pi_1 = \begin{pmatrix} AQ + B\hat{C} & A + B\hat{D}C \\ \hat{A} & PA + \hat{B}C \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\Pi_1^T \mathcal{X}_1 \mathcal{B}_1 = \Pi_2^T \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} B_1 + B\hat{D}F_1 \\ PB_1 + \hat{B}F_1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{C}_1 \Pi_1 = \begin{pmatrix} C_1 Q + E_1 \hat{C} & C_1 + E_1 \hat{D}C \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\Pi_1^T \mathcal{X}_1 \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{pmatrix} Q & I \\ I & P \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

²Ved en kongruent transformasjon $A \rightarrow C^T A C$ (C ikke-singulær) beholdes samme antall negative og positive egenverdier, samt antall egenverdier som er null (Strang, 1988).

Vi ser at vi nå har fjernet de ulineære leddene, og sitter igjen med et løsbart sett med LM'er. Disse ønsker vi å løse med hensyn på variablene \mathbf{P} , \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ og $\hat{\mathbf{D}}$. Når vi har funnet disse kan vi regne oss tilbake til regulatorens parametre \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c og \mathbf{D}_c . Dette gjøres ved å først finne to matriser \mathbf{M} og \mathbf{N} , som tilfredsstill $\mathbf{PQ} + \mathbf{MN}^T = \mathbf{I}$ (ligning (3.9)) og som har full rang. Deretter kan regulatorparametrene finnes fra ligning (3.10)-(3.13).

3.3 Generell multikanal regulering

I forrige underkapittel så vi hvordan man kan spesifisere krav til transferfunksjonsmatrisen i en kanal, fra \mathbf{w}_k til \mathbf{z}_j , for deretter å utføre en kongruent transformasjon slik at kravene omformes til et løsbart sett med LM'er. Fra resultatet man får kan man deretter regne seg tilbake til regulatorparametrene.

Vi kan nå utvide dette til å gjelde flere kanaler, slik at vi kan legge inn flere krav. Vi kan f.eks. igjen tenke oss at vi har et krav til \mathcal{H}_2 -norm i en kanal, men at vi også legger inn et krav til begrensning av \mathcal{H}_∞ -norm. Framgangsmåten blir den samme som i forrige underkapittel: Først beskrives kravene som matriseulikheter, og deretter foretas en kongruent transformasjon. Dette gir et løsbart sett med LM'er, og løsningen kan brukes til å finne \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c og \mathbf{D}_c . Generelt vil ethvert nytt krav generere en ny variabel \mathcal{X}_i , men med utgangspunkt i det som er vist i Carsten W. Scherer et al. (1995) og Scherer (1995) setter vi alle til å være den samme variabelen \mathcal{X} . Resultatet av denne modifikasjonen er at kravene vi uttrykker med LM'ene vil være *tilstrekkelige*, og ikke nødvendige.

Vi får som i forrige underkapittel, men nå mere generelt, følgende krav til \mathcal{H}_2 -norm: $\|\mathbf{T}_{jk}\|_2^2 < \alpha$ og \mathcal{A} er stabil, hvis, og bare hvis, det eksisterer symmetriske matriser \mathcal{X} og \mathcal{Z} med $\text{trace}(\mathcal{Z}) < \alpha$ og

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} & \mathcal{X} \mathcal{B}_k \\ \mathcal{B}_k^T \mathcal{X} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{C}_j^T \\ \mathcal{C}_j & \mathcal{Z} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.21)$$

Dette forutsetter også at $\mathcal{D}_{jk} = 0$.

Kravet til \mathcal{H}_∞ -norm kan finnes ved å anvende det såkalte *Bounded Real Lemma* (Lemma B.3). Vi får at $\|\mathbf{T}_{jk}\|_\infty < \gamma$ hvis, og bare hvis, det eksisterer en symmetrisk \mathcal{X} med

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} & \mathcal{X} \mathcal{B}_k & \mathcal{C}_j^T \\ \mathcal{B}_k^T \mathcal{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathcal{D}_{jk}^T \\ \mathcal{C}_j & \mathcal{D}_{jk} & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0, \quad \mathcal{X} > 0 \quad (3.22)$$

\mathcal{X} deles opp på samme måte som vist i ligning (3.7), og vi anvender de samme uttrykkene for Π_1 , Π_2 , \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} og \hat{D} , gitt av ligningene (3.8) og (3.10)-(3.13). De generelle uttrykkene for ligning (3.16)-(3.19) blir nå

$$\Pi_1^T \mathcal{X} \mathcal{A} \Pi_1 = \Pi_2^T \mathcal{A} \Pi_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\Pi_1^T \mathcal{X} \mathcal{B}_k = \Pi_2^T \mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_k + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}_k \\ \mathbf{P}\mathbf{B}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{F}_k \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{C}_j \Pi_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_j \mathbf{Q} + \mathbf{E}_j \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_j + \mathbf{E}_j \hat{\mathbf{D}} \mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\Pi_1^T \mathcal{X} \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Kravene til \mathcal{H}_2 -norm kan dermed omformuleres ved en kongruent transformasjon med $\text{diag}(\Pi_1, \mathbf{I})$, mens den største matrisen i kravene til \mathcal{H}_∞ -norm transformeres med $\text{diag}(\Pi_1, \mathbf{I}, \mathbf{I})$. Det siste kravet til \mathcal{H}_∞ -norm transformeres selvsagt tilsvarende, men med Π_1 . Disse kongruente transformasjonene gir nå ledd tilsvarende de generelle uttrykkene i ligningene (3.23)-(3.26), og vi løser igjen med hensyn på \mathbf{P} , \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ og $\hat{\mathbf{D}}$. Regulatorparametrene finnes deretter som før.

3.4 Krav til passivitet i en kanal

I forrige underkapittel så vi hvordan man kunne legge inn flere krav i regulator-syntesen. Dette kan selvsagt også gjelde andre krav enn \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -norm. Spesielt kan vi tenke oss hvordan vi kan legge inn krav til passivitet i en kanal, ved å si at transferfunksjonen \mathbf{T}_{jk} skal være *utvidet strengt positiv reell (ESPR)* (Vedlegg A). Dette er ekvivalent med å kreve (Lemma B.4) at det eksisterer en symmetrisk \mathcal{X} , slik at

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathbf{A} & \mathcal{X} \mathbf{B}_k - \mathbf{C}_j^T \\ \mathcal{X} \mathbf{B}_k - \mathbf{C}_j & -\mathcal{D}_{jk}^T - \mathcal{D}_{jk} \end{pmatrix} < 0, \quad \mathcal{X} > 0 \quad (3.27)$$

De kongruente transformasjonene utføres her med henholdsvis $\text{diag}(\Pi_1, \mathbf{I})$ og Π_1 .

3.5 Passivitetskrav fra virtuell utgang til pådrag

Vi har sett hvordan krav til passivitet i en kanal kan uttrykkes ved bruk av LMier, men i praksis er vi ofte mere opptatt av å studere passivitet i tilbakekoblingen fra målingen til pådraget. Dette kan sees i sammenheng med resultatene fra passivitetsteorien (Vedlegg A), som beskriver hvordan et passivt system med et strengt passivt system i tilbakekoblingen vil være asymptotisk stabilt.

Krav til stabilitet i systemet er egentlig allerede tatt hensyn til ved spesifisering av \mathcal{H}_∞ -normen, slik at like viktig som oppfyllelsen av stabilitet er kravet til et mere robust system. Ved å kreve passivitet i tilbakekoblingen fra et passivt system vil vi få bedre robusthet med hensyn på usikkerhet i modellen og variasjoner i parametrene. Dette er det samme som å kreve positiv reell tilbakekobling, og vi vil da utnytte alledede eksisterende informasjon om passivitet i systemet til å bedre robustheten.

La oss nå ta utgangspunkt i det modifiserte systemet:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Her kan vi se på utgangen z_2 som en *virtuell måling* uten målestøy.

Vår regulator er som før gitt av ligning (3.3), slik at vi får for transferfunksjonsmatrisen fra \mathbf{w} til z_1 :

$$\mathbf{T}_{z_1\mathbf{w}} = \mathbf{T}_{11} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_c\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_c & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}\mathbf{D}_c\mathbf{F}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C} & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c\mathbf{F}_1 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{E}_1\mathbf{D}_c\mathbf{C} & \mathbf{E}_1\mathbf{C}_c & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{E}_1\mathbf{D}_c\mathbf{F}_1 \end{array} \right) \quad (3.29)$$

I tillegg finner vi transferfunksjonsmatrisen fra z_2 til $-\mathbf{u}$ som

$$\mathbf{T}_{-uz_2} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ -\hat{\mathbf{C}} & -\hat{\mathbf{D}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_c(\mathbf{C} - \mathbf{C}_2) & \mathbf{B}\mathbf{C}_c & \mathbf{B}\mathbf{D}_c \\ \mathbf{B}_c(\mathbf{C} - \mathbf{C}_2) & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ -\mathbf{D}_c(\mathbf{C} - \mathbf{C}_2) & -\mathbf{C}_c & -\mathbf{D}_c \end{array} \right) \quad (3.30)$$

Vi ønsker nå en regulator som oppfyller to krav:

1. $\|\mathbf{T}_{z_1\mathbf{w}}\|_\infty < \gamma$.
2. \mathbf{T}_{-uz_2} skal være utvidet strengt positiv reell (ESPR).

Det første kravet gir et eksponensielt stabilt system, mens det andre kravet er tatt med for å gjøre systemet mere robust. Kravet til utvidet strengt positiv reell tilbakekobling er et strengere krav enn krav til kun positiv reell tilbakekobling, men det er enklere å uttrykke ved matriseulikheter.

Et eksempel på praktisk implementering av dette kan være et kjøretøy som vi ønsker å styre ved å måle dets posisjon. Transferfunksjonen fra pådraget til posisjonsmålingen vil oftest ikke være passiv, men dersom transferfunksjonen fra pådraget til kjøretøyets hastighet er passiv vil vi typisk anvende denne hastigheten som virtuell måling. Dersom kravet til at \mathbf{T}_{-uz_2} skal være positiv reell

oppfylles vil vi ha kommet fram til en regulator som gir et mere robust totalsystem.

Framgangsmåten som er beskrevet i Johannessen (1996) er en to-skritts metode, hvor man først løser \mathcal{H}_∞ -kravet ved å anvende metoden jeg har beskrevet for multikanal systemer. Dvs. ved å foreta en kongruent transformasjon, slik at man får et sett med LMier som kan løses.

Deretter anvendes \mathbf{Q} som man har funnet til å foreta en transformasjon av tilstandsvektoren:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} \quad (3.31)$$

Slik at systemmatrisene blir

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}_1 \quad (3.33)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \quad \bar{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

og i tillegg

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{N} \quad (3.35)$$

Kravene til \mathcal{H}_∞ -norm, gitt av ligning (3.22), får etter den kongruente transformasjonen ledd gitt av ligningene (3.23)-(3.26). Ved for- og ettermultiplikasjon av det “minste” kravet ($\Pi_1^T \mathcal{X} \Pi_1 > 0$) med $\text{diag}(\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}})$, og for- og ettermultiplikasjon av det “største” kravet med $\text{diag}(\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ får vi følgende to nye krav:

$$\bar{\mathbf{P}} > \mathbf{I} \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{21}^T \\ \bar{\Psi}_{21} & \bar{\Psi}_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

der

$$\bar{\Psi}_{11} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}} + (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}})^T & \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}})^T & \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}} + (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}})^T \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\bar{\Psi}_{21} = \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}_1)^T & (\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{F}_1)^T \\ \bar{\mathbf{C}}_1 + \mathbf{E}_1\bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{C}}_1 + \mathbf{E}_1\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\bar{\Psi}_{22} = \begin{pmatrix} -\gamma\mathbf{I} & (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{E}_1\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}_1)^T \\ \mathbf{D}_{11} + \mathbf{E}_1\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

og

$$\bar{\hat{\mathbf{A}}} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}_c\bar{\mathbf{N}}^T + \bar{\mathbf{M}}\mathbf{B}_c\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{C}_c\bar{\mathbf{N}}^T + \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_c\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.41)$$

$$\bar{\hat{\mathbf{B}}} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{B}_c + \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{D}_c \quad (3.42)$$

$$\bar{\hat{\mathbf{C}}} = \mathbf{C}_c\bar{\mathbf{N}}^T + \mathbf{D}_c\bar{\mathbf{C}} \quad (3.43)$$

Vi legger merke til at $\bar{\Psi}_{22}$ ikke har endret seg fra ligning (3.22).

Årsaken til at denne transformasjonen av tilstandsvektoren innføres, ligger i kravet til ESPR transferfunksjonsmatrise \mathbf{T}_{-u_2} . Med utgangspunkt i Lemma B.4 gir dette følgende matriseulikhet:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{c}}^T + \boldsymbol{\chi} \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\chi} & \hat{\mathbf{D}}^T + \hat{\mathbf{D}} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

(Endring i fortegn kommer av at pådraget er negativt.)

Når man nå utfører den vanlige kongruente transformasjonen, som i underkapittel 3.4, sitter man igjen med ulineære ledd. Et eksempel på dette er den transformerte matrisens element plassert i første kolonne og første rad:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C}_2\mathbf{Q} - (\mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C}_2\mathbf{Q})^T \quad (3.45)$$

Vi ser at de to siste leddene er produkter av både \mathbf{Q} og $\hat{\mathbf{D}}$, som vi ønsker å finne mulige løsninger av. Dette skaper nye problemer for løseligheten av problemet. Etter transformasjonen av tilstandsvektoren får vi derimot et nytt krav for ESPR \mathbf{T}_{-u_2} , gitt av

$$\begin{pmatrix} \bar{\Theta}_{11} & \bar{\Theta}_{21}^T \\ \bar{\Theta}_{21} & \bar{\Theta}_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

der

$$\bar{\Theta}_{11} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}} + (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}})^T & \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}} \\ -\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2 - (\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2)^T & -\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2 - (\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2)^T \\ \bar{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}})^T & \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}} + (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}})^T \\ -(\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2)^T - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}_2 & -\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}_2 - (\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}_2)^T \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$\bar{\Theta}_{21} = \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}})^T + \bar{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{B}}^T + \hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{C}}_2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\bar{\Theta}_{22} = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}^T \quad (3.49)$$

Vi legger også her merke til at $\bar{\Theta}_{22}$ ikke er endret etter transformasjonen.

Vi ser at problemet med ulineære ledd nå er løst, og andre steg av løsningsprosedyren blir nå å løse det nye settet med LM'er, som består av ligningene (3.36), (3.37) og (3.46). Disse løses med hensyn på variablene $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ og $\hat{\mathbf{D}}$. Deretter finner vi, tilsvarende som før, to matriser med full rang, men nå er dette transformerte utgaver $\bar{\mathbf{M}}$ og $\bar{\mathbf{N}}$, som skal tilfredsstill

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}^T = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}} \quad (3.50)$$

Når vi har disse kan vi regne oss tilbake til regulatorparametrene.

Kapittel 4

Mekanisk oscillatorisk system: Skip med stigerør og ROV

I dette kapittelet presenteres en dynamisk modell for et system bestående av skip, stigerør og ROV. Denne modellen er hentet fra Schjøberg (1996), og omhandler bare sideveis (lateral) bevegelse.

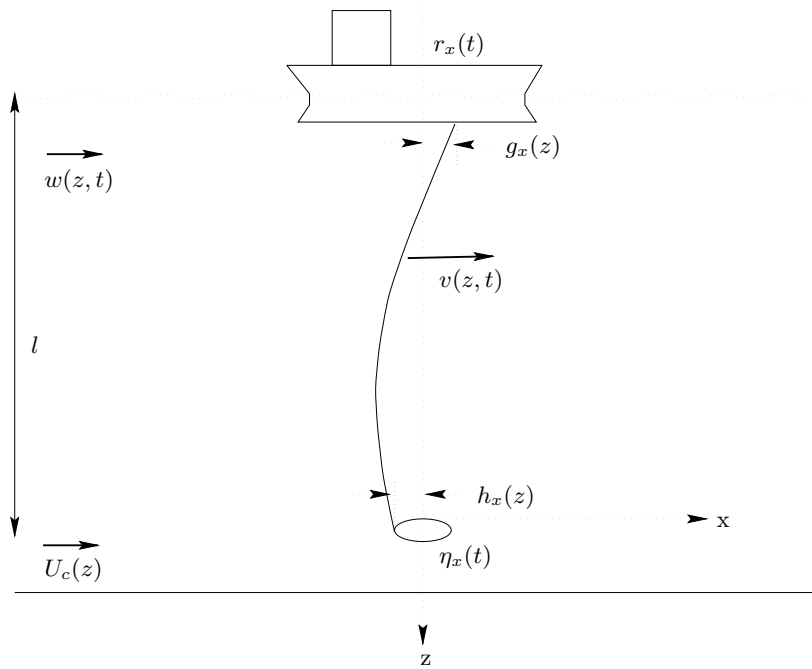
Dette vil være et aktuelt system når man ønsker å feste et stigerør til et brønnhode på havbunnen, men vi kan også tenke oss stigerøret byttet ut med en kommunikasjonskabel, eller annen type slank struktur, og få en tilsvarende situasjon. I det påfølgende vil jeg referere til denne slanke strukturen som “kabel”.

Problemet med dette systemet er at det vil oppstå svingninger på kabelen, som følge av havbølger, strøm, o.l. Disse svingningene ønsker man å undertrykke, samtidig som man forflytter ROVen.

4.1 Sideveis bevegelse for skip med stigerør og ROV

Figur 4.1 viser en prinsippskisse for vårt system, som vi nå ønsker å modellere. På figuren har vi:

- $r_x(t)$ er en funksjon som beskriver overflateskipets bevegelse.
- $g_x(z) = 1 - \frac{z}{l}$ er kabelens statiske avvik, med skipet forskjøvet en enhet.
- $h_x(z) = \frac{z}{l}$ er kabelens statiske avvik, med ROVen forskjøvet en enhet.
- $w(z, t)$ er bølgehastigheten.
- $U_c(z)$ havstrømmens hastighet.



Figur 4.1: Prinsippskisse for system bestående av skip, kabel og ROV.

- $v(z, t)$ er kabelens sideveis forskyvning.
- l er dybden det opereres på.
- $\eta_x(t)$ er ROVens sideveis forskyvning (posisjon).

4.1.1 ROVens bevegelsesligning

Ved dybden $z = l$ kan ROVens sideveis bevegelse beskrives ved

$$m_t \ddot{\eta}_x(t) + d_1 \dot{\eta}_x(t) + d_2 [\dot{\eta}_x(t) - U_{c_l}] |\dot{\eta}_x(t) - U_{c_l}| = u_{t_x} + f_{c_x}(z, t) \quad (4.1)$$

der m_t er masse og tilleggsmasse for ROV, d_1 er den lineære dempningskoeffisienten, d_2 er drag koeffisienten, $U_{c_l} = U_c(z = l)$ er hastigheten til havstrømmen ved dybde l , u_{t_x} er ROVens skyvkraft i sideveis retning og $f_{c_x}(z, t)$ er sideveis kraft som virker fra kabelen på ROVen. Fossen (1994) gir en mere utfyllende forklaring på disse parametrene og hvordan man kommer fram til denne (hastighets)ligningen.

4.1.2 Kabelens bevegelsesligning

Den horisontale bevegelsen til kabelen kan beskrives ved

$$EI \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + c \dot{v}(z, t) + m_c \ddot{v}(z, t) = f_{xs}(z, t) \quad (4.2)$$

der EI er kabelens stivhet (antas konstant), T er aksialstrekk i kabelen (middelverdi), c er strukturell dempning, m_c er kabelens totalmasse per lengdeenhet og $f_{xs}(z, t)$ er hydrodynamisk belastning.

De naturlige svingemodiene finnes ved å sette den hydrodynamiske belastningen til null, for deretter å løse den partielle differensialligningen. En løsning for svingemodi i kan finnes ved separasjon av variable, ved at man antar en løsning på formen

$$v_i^*(z, t) = p_i(z)q_i(t) \quad (4.3)$$

Ved innsetning gir dette

$$EI \frac{p_i''''(z)}{p_i(z)} - T \frac{p_i''(z)}{p_i(z)} = -m_c \frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)} - c \frac{\dot{q}_i(t)}{q_i(t)} = k_i \quad (4.4)$$

der k_i er en konstant¹. Resultatet blir to nye differensialligninger:

$$m_c \ddot{q}_i(t) + c \dot{q}_i + k_i q_i = 0 \quad (4.5)$$

$$EI p_i''''(z) - T p_i''(z) - k_i p_i(z) = 0 \quad (4.6)$$

Løsningen til ligning (4.5) er en oscillator med resonansfrekvens ω_i og relativ dempning ζ_i gitt ved

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_c}, \quad \zeta_i = \frac{c}{2\sqrt{k_i m_c}} \quad (4.7)$$

Løsningen til ligning (4.6) vil generelt være:

$$p_i(z) = A_{i_1} \sinh n_{i_1} z + A_{i_2} \cosh n_{i_1} z + A_{i_3} \sin n_{i_2} z + A_{i_4} \cos n_{i_2} z \quad (4.8)$$

der

$$n_{i_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{EI} (2T + 2\sqrt{T^2 + 4k_i EI})} \quad (4.9)$$

$$n_{i_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{EI} (-2T + 2\sqrt{T^2 + 4k_i EI})} \quad (4.10)$$

¹Uttrykkene på begge sider av det første likhetstegnet i ligning (4.4) må være konstante for at likheten skal kunne oppnås. Endres tiden t vil ikke uttrykket som avhenger av forskyvningen z endre seg, slik at likhet kan bare oppnås ved at uttrykkene er konstante (Kreyszig, 1988).

Verdien på de ukjente parametrene i denne generelle løsningen finnes ved å studere grensebetingelsene for kabelens bevegelse.

I Schjølberg (1996) antas det at koblingene mellom skip/ROV og kabel består av kuleledd. Dette gir grensebetingelser som leder til følgende krav for $p_i(z)$:

$$p_i(0) = p_i''(0) = 0 \quad (4.11)$$

$$p_i(l) = p_i''(l) = 0 \quad (4.12)$$

Ligning (4.11) gjør at vi må velge $A_{i_2} = A_{i_4} = 0$, mens ligning (4.12) gir oss

$$A_{i_1} \sinh n_{i_1} l + A_{i_3} \sin n_{i_2} l = 0 \quad (4.13)$$

$$A_{i_1} n_{i_1}^2 \sinh n_{i_1} l - A_{i_3} n_{i_2}^2 \sin n_{i_2} l = 0 \quad (4.14)$$

Dersom vi nå setter

$$A_{i_1} \sinh n_{i_1} l = -A_{i_3} \sin n_{i_2} l \quad (4.15)$$

inn i ligning (4.14) får vi $\sin n_{i_2} l = 0$, og dermed

$$A_{i_1} = 0 \quad (4.16)$$

$$n_{i_2} l = i\pi \quad (4.17)$$

$$k_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 (EI \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 + T) \quad (4.18)$$

(A_{i_1} settes lik null for å unngå den trivielle løsningen $n_{i_1} = 0$.) Resultatet av denne utregningen er

$$p_i(z) = A_{i_3} \sin n_{i_2} z \quad (4.19)$$

slik at det gjenstår å finne verdien av parameteren A_{i_3} .

Den totale bevegelsen av kabelen finnes ved å legge sammen alle vibrasjonsmodiene, samt ved å legge til bevegelsen av kabelendene. I endene virker bevegelsen til overflateskipet og ROVen. Disse er gitt ved $r_x(t)g_x(z)$ og $\eta_x(t)h_x(z)$, slik at kabelens totalrespons blir

$$v(z, t) = g_x(z)r_x(t) + h_x(z)\eta_x(t) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i(z)q_i(t) \quad (4.20)$$

4.1.3 Bevegelsesligning i normale koordinater

Resterende ukjente i bevegelsesligningene for kabelen finnes ved å anvende krav til ortogonale funksjoner $p_i(z)$

$$\int_0^l p_i(z)p_j(z) dz = 0 \quad , i \neq j \quad (4.21)$$

og bruk av normalisering

$$\int_0^l p_i^2(z) dz = a_i \quad (4.22)$$

Det er ofte vanlig å velge $a_i = 1$, men med normaliseringen

$$\int_0^l m_c p_i^2(z) dz = m_{ctot} \quad (4.23)$$

der m_{ctot} er kabelens totale masse, blir det naturlig å velge

$$a_i = \frac{m_{ctot}}{m_c} = \frac{m_c l}{m_c} = l \quad (4.24)$$

Denne formen for normalisering finner vi i Egeland (1991). Årsaken til at nettopp denne normaliseringen velges vil vi komme tilbake til i underkapittel 4.1.5.

Dersom vi setter inn for $p_i(z)$ i ligning (4.22) får vi nå

$$A_{i3}^2 \int_0^l \sin^2 n_{i2} z dz = a_i \quad (4.25)$$

↓

$$A_{i3}^2 \frac{l}{2} = a_i \quad (4.26)$$

↓

$$A_{i3} = \sqrt{2} \quad (4.27)$$

Ved å anvende prinsippene for ortogonalitet og normalisering kan vi nå også finne innvirkningen av hydrodynamiske krefter, skips- og ROV-bevegelse på kabelen. Settes totalligningen (4.20) inn i bevegelsesligningen (4.2) får vi en ny ligning som kan multipliseres med $p_j(z)$, for deretter å integreres over lengden av kabelen. Resultatet, etter bruk av ortogonalitets- og normaliseringsprinsippet, er en ny bevegelsesligning på formen

$$m_c \ddot{q}_i(t) + c \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = G_i \quad (4.28)$$

der $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$ og

$$G_i = \frac{1}{a_i} \int_0^l p_i(z) [f_{xs}(z, t) - c g_x(z) \dot{r}_x(t) - c h_x(z) \dot{\eta}_x(t) - m_c g_x(z) \ddot{r}_x(t) - m_c h_x(z) \ddot{\eta}_x(t)] dz \quad (4.29)$$

G_i er nå et uttrykk for de kreftene som virker på kabelen, men motsatt virker det også krefter på overflateskip og ROV. Overflateskipet antas å ha stor masse

i forhold til kabelen, slik at bevegelsen ikke blir påvirket av kabelen. ROVen vil derimot blir påvirket av kraften

$$f_{c_x}(z, t) = -\gamma_i m_c \ddot{q}_i(t) \quad (4.30)$$

der

$$\gamma_i = \frac{1}{a_i} \int_0^l p_i(z) h_x(z) dz \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{a_i} \frac{A_{i_3}}{l} \int_0^l z \sin n_{i_2} z dz \quad (4.32)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{ln_{i_2}} \cos n_{i_2} l \quad (4.33)$$

Anvender vi $n_{i_2} l = i\pi$ fra ligning (4.17) får vi

$$\gamma_i = (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \quad (4.34)$$

4.1.4 Totalsystem

For svingemodi i kan vi nå sette opp totalsystemet på matriseform, ved å ta utgangspunkt i ligningene (4.1) og (4.28). Vi definerer en tilstandsvektor $\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_x, q_i]^T$, og får etter litt ombytting av rekkefølgen på ligningenes forskjellige ledd

$$\mathbf{M}_t \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_t(\dot{\tilde{\mathbf{x}}}) + \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.35)$$

der

$$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} m_t & \gamma_i m_c \\ \gamma_i m_c & m_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_i \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

og

$$\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} d_1 \dot{\eta}_x + d_2(\dot{\eta}_x - U_{cl})|\dot{\eta}_x - U_{cl}| \\ \gamma_i c \dot{\eta}_x + c \dot{q}_i \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

I denne modellen har vi $\mathbf{u} = [u_{t_x}, 0]^T$ som pådragsvektor og $\mathbf{f} = [0, f_i]^T$ inneholder kreftene som oppstår fra bølger, havstrøm og overflateskipets bevegelse. f_i er er gitt ved

$$f_i = \frac{1}{a_i} \int_0^l p_i(z) [f_{xs}(z, t) - c g_x(z) \dot{r}_x - m_c g_x(z) \ddot{r}_x] dz \quad (4.38)$$

Vi ser at denne modellen er ulineær, men den kan lineariseres omkring likevektspunktet $\dot{\eta}_x = 0$, slik at vi får følgende lineære modell:

$$\mathbf{M}_t \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_1 \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_t \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.39)$$

Den lineariserte utgaven av \mathbf{D}_t -matrisen blir

$$\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} d_1 + 2d_2 U_{c_1} & 0 \\ \gamma_i c & c \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

I både den ulineære og lineariserte utgaven av totalsystemet inngår den hydrodynamiske belastningen $f_{xs}(z, t)$ og overflateskipets bevegelse r_x . Disse kan uttrykkes ved

$$r_x(t) = A_1 \sin(\omega_n t + \psi_1) \quad (4.41)$$

$$f_{xs}(z, t) = c_1 \dot{\omega}(z, t) + c_2 (\omega(z, t) - U_c(z)) |\omega(z, t) - U_c(z)| \quad (4.42)$$

der

- A_1 er amplituden av overflateskipets bevegelse.
- ψ_1 er faseforskyvningen.
- ω_n er den dominerende bølgefrequensen.
- $c_1 = \frac{\pi}{4} \rho C_m D_0^2$, hvor ρ er tettheten av vannet, D_0 er kabelens diameter og C_m er drag koeffisient.
- $c_2 = \frac{1}{2} \rho C_d D_0$, hvor C_d også er en drag koeffisient.

Her er det antatt at skipet ligger posisjonert ved hjelp av et dynamisk posisjonerings (DP) system. Bølgehastigheten $\omega(z, t)$ kan beskrives ved

$$\omega(z, t) = \omega_n \xi_a e^{-bz} \sin(\omega_n t) \quad (4.43)$$

der ξ_a er bølgeamplituden og $b = \frac{2\pi}{\lambda}$, hvor λ er bølgelengden.

4.1.5 Kommentar til normalisering

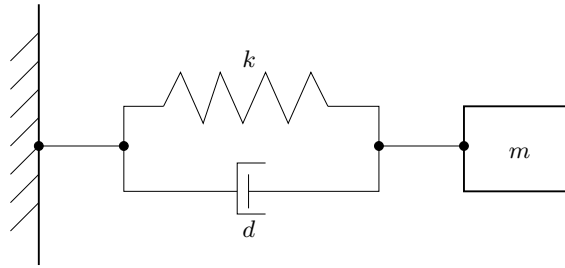
Fra den lineariserte modellen, gitt av ligning (4.39), ser vi at vi kan sammenligne med uttrykket for et svingesystem bestående av en fjær og demper, vist på Figur 4.2. Systemet kan beskrives ved

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.44)$$

der m er massen, d er dempningskonstanten og k er fjærkonstanten.

Det naturlige vil være at disse fysiske størrelsene er større eller lik null. Massen vil i alle tilfeller måtte være positiv, og analogt med dette kan vi kreve at vår "massematrix" \mathbf{M}_t skal være positiv definit:

$$\mathbf{M}_t > 0 \quad (4.45)$$



Figur 4.2: Svingesystem bestående av masse, fjær og demper.

Fra Strang (1988) har vi da at egenverdiene til \mathbf{M}_t må være positive.

Med utgangspunkt i uttrykket for \mathbf{M}_t fra ligning (4.36) får vi følgende egenverdier:

$$\lambda = \frac{m_c + m_t}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_c - m_t)^2 + 4(\gamma_i m_c)^2} \quad (4.46)$$

Fra denne utregningen ser vi at den ene egenverdien alltid vil være positiv. For at den andre verdien også skal være positiv må vi derimot ha oppfylt ulikheten

$$(m_c + m_t)^2 > (m_c - m_t)^2 + 4(\gamma_i m_c)^2 \quad (4.47)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m_t}{m_c} > \gamma_i^2 \quad (4.48)$$

$$(4.49)$$

Utrekning av γ_i fra ligning (4.31), uten innsettelse av $a_i = l$, gir

$$\gamma_i = (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{2l}{a_i}} \frac{1}{i\pi} \quad (4.50)$$

slik at kravet til positiv egenverdi blir

$$a_i > \frac{m_c}{m_t} 2l \left(\frac{1}{i\pi}\right)^2 \quad (4.51)$$

Den største verdien av a_i som er nødvendig for positiv egenverdi finnes ved å se på svingemodi $i = 1$. Ved innsettelse av følgende verdier: $m_t = 80$, $m_c = 15$, $l = 600$ og $i = 1$, får vi

$$a_i > 22.8 \quad (4.52)$$

Åpenbart vil ikke $a_i = 1$ være noe godt valg, da det gir en negativ egenverdi for \mathbf{M}_t . En slik verdi vil bare kunne fungere ved kabellengder $l < 26.3$. Derimot vil $a_i = l = 600$ være et bedre valg, og vi oppnår en positiv definit \mathbf{M}_t .

4.2 Tilstandsrommodell for sideveis bevegelse

Med utgangspunkt i den lineære modellen som ble utviklet for totalsystemet, kan vi nå omgjøre modellen til en tilstandsrommodell på den formen vi er vant til.

Første steg er å definere en ny tilstandsvektor $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}]^T$. Med utgangspunkt i det systemet som ble introdusert i underkapittel 2.1 vil det også være naturlig å definere $\mathbf{w} = [f_i, \eta_{x_d}, w_m]^T$ for de eksterne inngangene. I denne vektoren er to nye parametre definert: η_{x_d} er posisjonsreferansen for ROVen og w_m er målestøy.

Tilstandsrommodellen kan nå settes opp som:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}u_{t_x} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{E}_1u_{t_x} \quad (4.54)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\mathbf{w} \quad (4.55)$$

der

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}_t^{-1}\mathbf{K}_t & -\mathbf{M}_t^{-1}\mathbf{D}_l \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}_t^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{M}_t^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \text{vekt}_{\eta_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{vekt}_{\eta_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{vekt}_{\eta_{x_d}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{vekt}_{u_{t_x}} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad \mathbf{F}_1 = (0 \ -1 \ 1) \quad (4.59)$$

4.3 Numeriske verdier for systemet

Ved undersøkelse av vårt system anvendes de samme numeriske dataene som er angitt i Schjølberg (1996). En oversikt over disse verdiene er gitt i Tabell 4.1-4.3.

I tillegg anvendes en forenklet utgave av forstyrrelsesfunksjonen f_i , gitt ved

$$f_i = C_1(\sin(\omega_n t) + \cos(\omega_n t)) \quad (4.60)$$

Denne forstyrrelsesfunksjonen er vist på Figur 4.3.

Parameteren d_2 er ikke oppgitt sammen med de andre verdiene, men med utgangspunkt i at dette er en drag koeffisient kan vi anvende det generelle uttrykket

$$d_2 = \frac{1}{2}\rho C_d A \quad (4.61)$$

Betegnelse	Forkortelse	Verdi
Strukturell dempning	c	5 Ns/m ²
Drag koeffisient	C_m	1
Drag koeffisient	C_d	1.6
Ytre diameter	D_0	0.1 m
Stivhet	EI	4 10 ⁹ Nm ²
Total masse	m_c	15 kg/m
Midlere aksialstrekk	T	1.11 10 ⁶ N

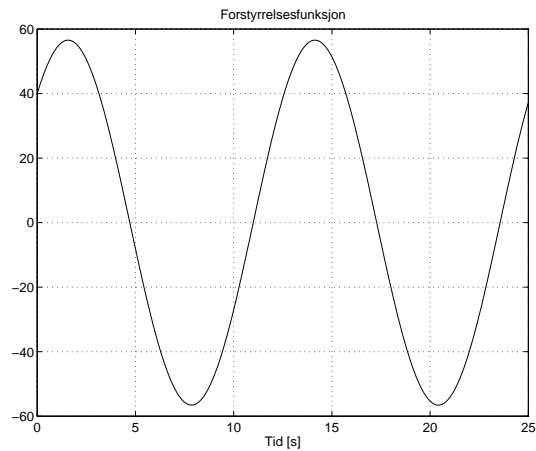
Tabell 4.1: Numeriske data for kabel/stigerør.

Betegnelse	Forkortelse	Verdi
Areal av tverrsnitt	A	1 m ²
Friksjonskoeffisient	d_1	100
Masse og tilleggs masse	m_t	80 kg

Tabell 4.2: Numeriske data for ROV.

Betegnelse	Forkortelse	Verdi
Vannets tetthet	ρ	1025 kg/m ³
Bølgeamplitude	ξ_a	1 m
Dominerende bølgefrequens	ω_n	0.5 Hz
Forstyrrelsens amplitude	C_1	40
Dybde	l	600 m
Strøm	U_{c1}	1 m/s

Tabell 4.3: Numeriske data for hav og bølger.

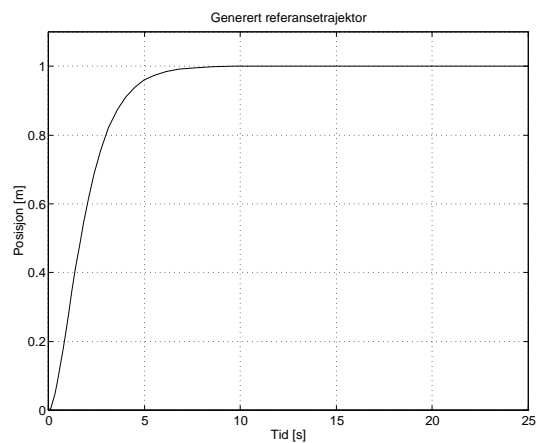
Figur 4.3: Forstyrrelsesfunksjon f_i .

Her er A arealet av ROVens tverrsnitt, slik at vi får $d_2 = 820$.

Referansen vi ønsker ROVen skal følge kan vi uttrykke ved

$$\ddot{\eta}_{x_d} + 2\lambda\dot{\eta}_{x_d} + \lambda^2\eta_{x_d} = \lambda^2 h_0 \quad (4.62)$$

der vi velger $\lambda = 1$ og $h_0 = 1$. Dette genererer en jevn kurve, som vist på Figur 4.4.



Figur 4.4: Generert trajektor for posisjonsreferansen.

Kapittel 5

Passivitets-basert regulatordesign og simuleringsresultater

I dette kapittelet vil jeg gå nærmere inn på systemet fra forrige kapittel, og implementere en regulatorstruktur for forflytting av ROVen. Utgangspunkt for dette er teorien omkring passive regulatorer jeg har beskrevet tidligere, med hovedvekt på bruken av LMIer.

I Vedlegg D finnes det utskrift av programkode jeg har brukt for generering av regulator og til å kjøre simuleringer. Dette er programkode som er brukt sammen med *Matlab* og LMI-optimaliseringsprogrammet *sdpsol*¹. En beskrivelse av hvordan *sdpsol* skal brukes er gitt av Shao-Po Wu & Stephen Boyd (1996).

5.1 Egenskaper ved systemet

Grunnleggende kjennskap til systemet vi ønsker å regulere vil kunne gi informasjon om hvordan regulatorstrukturen bør implementeres. I Vedlegg D ligger det utskrift av `kab_rov.m`, som jeg har brukt i Matlab for å finne en tilstandsrommodell for svingemodi i . Denne modellen har jeg deretter brukt for å studere forskjellige egenskaper.

Vår lineariserte modell gav opphav til tilstandsrommodellen

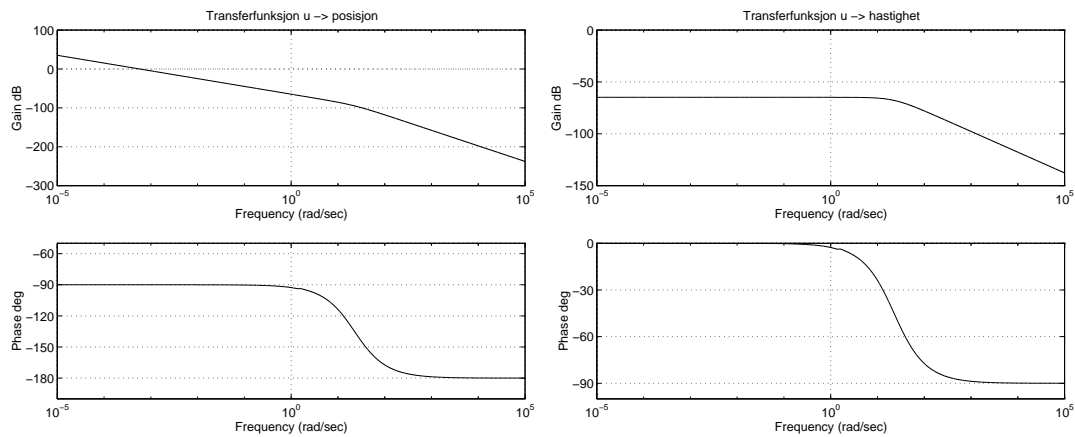
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}u_{t_x} \quad (5.1)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\mathbf{w} \quad (5.2)$$

der uttrykkene for matrisene er gitt i ligning (4.56)-(4.59). Av denne modellen ser vi at systemet er et såkalt *Single Input Single Output* (SISO) system, siden vi bare har ett pådrag, gitt ved u_{t_x} , og en måling, gitt ved $\tilde{\eta}_x = \eta_x - \eta_{x_d}$. For

¹Programmet kan hentes med FTP fra adressen: `ftp://isl.stanford.edu/pub/boyd/sdpsol/`

svingemodi $i = 1$ får vi ved å anvende funksjonen `bode` i Matlab plottene vist i Figur 5.1. Dette er transferfunksjonene fra pådraget til henholdsvis posisjonen og hastigheten.



Figur 5.1: Plott av transferfunksjonene fra pådraget u_{t_x} til henholdsvis posisjonen η_x og hastigheten $\dot{\eta}_x$.

Fra passivitetsteorien (Vedlegg A) vet vi at ved SISO systemer vil systemet være passivt dersom fasen ligger mellom 90° og -90° . I vårt tilfelle ser vi at systemet fra pådraget til hastigheten oppfyller dette kriteriet, mens vi ikke har passivitet fra pådraget til posisjonen.

Som forventet vil også systemet være stabilt, noe vi kan sjekke ved å se på egenverdiene til systemmatrisen \mathbf{A} . Ved bruk av `eig` i Matlab finner vi disse til å være: 0 , $-0.1686 \pm 1.4836i$ og -22.6051 . Dette er også for første svingemodi, men av uttrykkene for \mathbf{M}_t , \mathbf{D}_l og \mathbf{K}_t ser vi at dette vil være den kritiske modien. Med utgangspunkt i kommentaren som ble gitt i underkapittel 4.1.5 vil vi ha positiv definit \mathbf{M}_t dersom egenverdiene for $i = 1$ er positive. Tilsvarende vil egenverdiene til \mathbf{K}_t være avhengig av størrelsen på k_i , mens egenverdiene til \mathbf{D}_l er positive og uavhengige av svingemodien. k_i vil alltid være positiv, slik at kravet til positiv definit \mathbf{M}_t vil være bestemmende i systemet.

En annen viktig egenskap ved systemet er observerbarhet og styrbarhet. Dette kan sjekkes i Matlab ved bruk av funksjonene `obsv` og `ctrb`, som konstruerer henholdsvis observerbarhets- og styrbarhetsmatrisen. Deretter kan disse matrisenes rang sjekkes ved bruk av `rank`. Fra Fossen (1994) har vi da at full rang sikrer observerbarhet og styrbarhet. Resultatet av dette blir:

- Systemet med posisjonsmåling er styrbart og observerbart.
- Systemet med hastighetsmåling er styrbart, men ikke observerbart.

Kravene til detekterbarhet og stabiliserbarhet er ikke så strenge som observerbarhet og styrbarhet, slik at vi med hastighetsmåling fortsatt kan ha et detekterbart system, selv om det ikke er observerbart.

5.2 Regulatorstruktur

Ved måling av ROVens posisjon har vi ikke et passivt system fra pådraget til målingen, men dersom vi anvender muligheten til bruk av en virtuell måling kan vi oppnå passivitet fra pådraget til denne målingen. Den virtuelle målingen blir da av hastigheten, siden dette gir passivitet, og ved krav til passivt system i tilbakekoblingen vil vi oppnå et mere robust system. Krav til passivitet i tilbakekoblingen kan uttrykkes ved krav til *utvidet strengt positivt reelt* (ESPR) system (Vedlegg A), slik at en passende regulatorstruktur i vårt tilfelle vil være metoden som ble beskrevet under underkapittel 3.5. Kanalen med den virtuelle målingen blir da

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} \quad (5.3)$$

og til å spesifisere krav til et eksponensielt stabilt, robust system ved bruk av \mathcal{H}_∞ -regulering har vi fra før kanalen

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{E}_1 u_{tx} \quad (5.4)$$

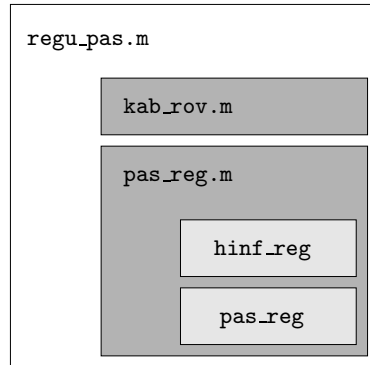
Vektleggingen av de forskjellige tilstandene i matrisene \mathbf{C}_1 og \mathbf{D}_{11} har jeg bestemt med utgangspunkt i at et avvik i posisjon eller hastighet på 0.1 m skal vektlegges med 1. Tilsvarende er vekten av pådraget bestemt med utgangspunkt i at et pådrag på 1000 N skal vektlegges med 1. Tabell 5.1 gir da en oversikt over de forskjellige parametrene i matrisene \mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_{11} og \mathbf{E}_1 .

Betegnelse	Forkortelse	Verdi
Vektlegging av posisjon	$vekt_{\eta_x}$	10
Vektlegging av posisjonsreferanse	$vekt_{\eta_{x_d}}$	10
Vektlegging av hastighet	$vekt_{\dot{\eta}_x}$	10
Vektlegging av pådrag	$vekt_{u_{tx}}$	10^{-3}

Tabell 5.1: Verdier som angir hvor mye de enkelte tilstandene og pådraget skal vektlegges i \mathcal{H}_∞ -normen.

Koden som brukes i Matlab og sdpsol ligger under Vedlegg D. For å anvende programmet sdpsol til LMI-optimalisering inne i Matlab følger det med et lite Matlab-script kalt `sdpsol.m`. Dette kalles fra Matlab, og filnavnet som ligger i variabelen `SDPSOL_FILENAME` anvendes som kildekode av programmet. Figur 5.2

viser en skisse av filstrukturen som tilsammen anvendes for å generere en regulator i Matlab, med kall til `sdpsol`. Filene som ikke har noen endelse er filer som anvendes av `sdpsol`. I tillegg til kildekoden kan `sdpsol` også anvende variablene som er generert i Matlabs arbeidsområde.



Figur 5.2: Filstruktur for generering av regulator.

Filstrukturen kan sammenlignes med to-steps-metoden som ble beskrevet i underkapittel 3.5. `hinf_ref` anvendes i første steg for å generere en \mathcal{H}_∞ -regulator. Deretter transformeres tilstandsvektoren, ved å bruke resultatet av dette første steget, før `pas_reg` anvendes. Dette blir det andre steget i metoden, hvor en \mathcal{H}_∞ -regulator, med krav til ESPR transferfunksjonsmatrise \mathbf{T}_{-uz_2} , genereres.

Kildekoden som er vedlagt viser at gammaverdien som \mathcal{H}_∞ -normen skal holdes lavere enn, holdes konstant ved løsingen av LMI-uttrykkene. Det kan imidlertid “sjongleres” med dette, slik at man f.eks. forsøker å minimalisere gammaverdien i ett av de to stegene, eller begge om man ønsker det. Optimalisering av gammaverdien er kommentert bort i koden som er vedlagt.

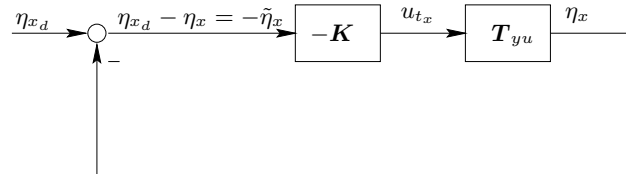
Et annet moment ved det andre steget i løsningsprosedyren er bruken av en slack-verdi. Dette gjør at kravet gitt i ligning (3.46) ikke nødvendigvis vil være oppfylt. Det ønskelige er at denne variabelen ikke behøves, men ved kjøring av `sdpsol` vil man ikke oppnå en løsning dersom den fjernes. For å unngå advarsler i `sdpsol` settes også variabelen `BIGM` (Shao-Po Wu & Stephen Boyd, 1996) til en høy verdi, noe vi kan se i filen `pas_reg.m`.

5.3 Simuleringsresultater

Denne delen presenterer todelte resultater. Det første underkapittelet viser resultater funnet ved bruk av faste gammaverdier og en fast, høy verdi for variabelen `BIGM` i `sdpsol`. Det neste underkapittelet viser endringer ved bruk av `BIGM` slik den er i utgangspunktet. Dvs. at `BIGM = 1e10` er kommentert bort i filen `pas_reg.m`.

Etter regulatorsyntesen sjekkes resultatene ved plott av transferfunksjoner og simuleringer i *Simulink*. Blokkskjemaene som er brukt i Simulink ligger under Vedlegg C. Det ene viser det lineariserte systemet (Figur C.1), mens det andre skjemaet viser det virkelige, ulineære systemet (Figur C.2).

Figur 5.3 viser hva som ligger bak transferfunksjonen \mathbf{H}_0 . Vi legger merke til at ved å anvende den negative utgaven av regulatoren får vi det positive pådraget som resultat, siden inngangen er det negative avviket.



Figur 5.3: Blokkskjema for den serielle koblingen mellom $-\mathbf{K}$ og \mathbf{T}_{yu} , som danner sløyfetransferfunksjonen \mathbf{H}_0 .

5.3.1 Fast γ og egendefinert BIGM

Med fast gammaverdi kan vi se på tre forskjellige resultater:

$\gamma = 15.90$ Ved bruk av fast gammaverdi på 15.9 ble slack-verdien 453.508. De resulterende transferfunksjonene er vist på Figur 5.4.

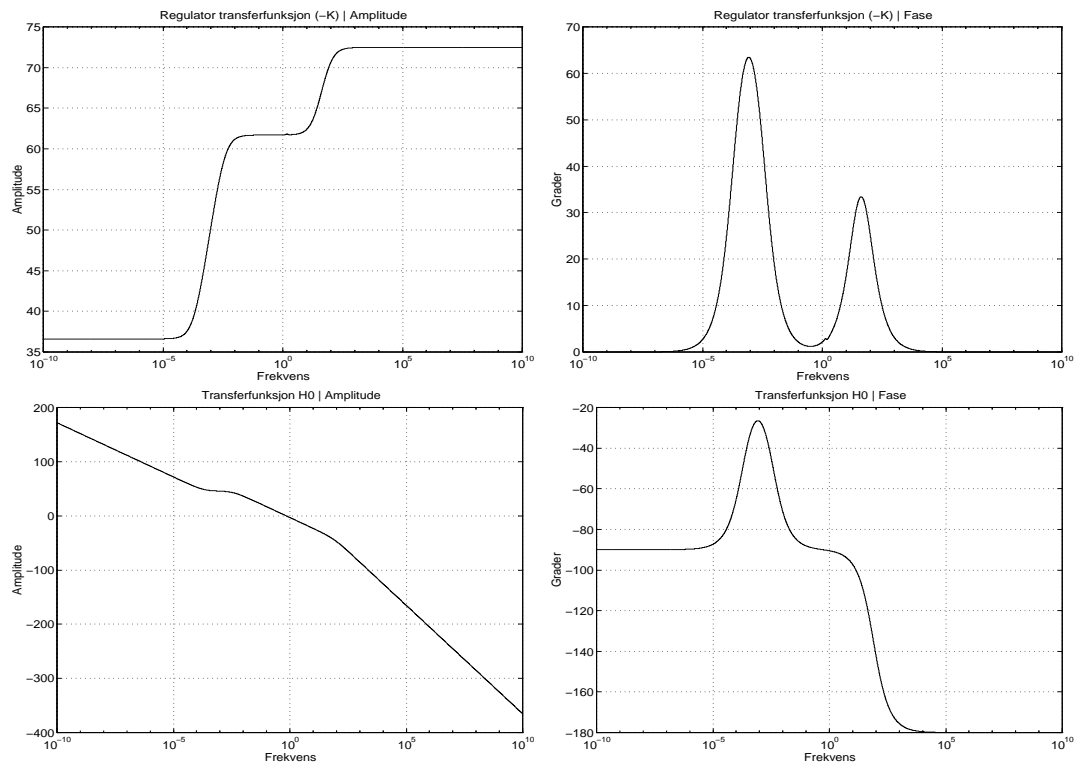
$\gamma = 15.95$ Ved bruk av fast gammaverdi på 15.95 ble slack-verdien 453.231. De resulterende transferfunksjonene er vist på Figur 5.5.

$\gamma = 16.00$ Ved bruk av fast gammaverdi på 16 ble slack-verdien 452.989. De resulterende transferfunksjonene er vist på Figur 5.6.

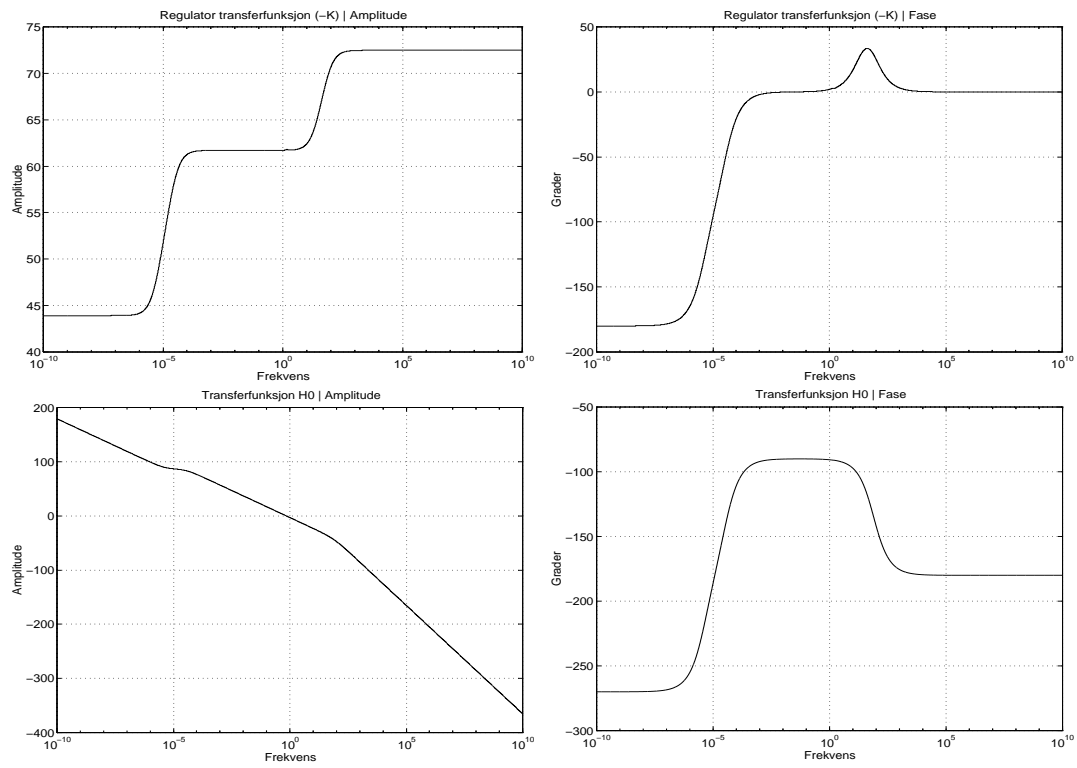
I alle de tre tilfellene ble transferfunksjonen \mathbf{T}_{-uz_2} fra z_2 til $-u$ seende tilnærmet ut som i Figur 5.7. Dette plottet er funnet ved bruk av $\gamma = 15.95$, men forskjellene er små.

Simuleringer i Simulink ved bruk av den lineariserte modellen gir tilnærmet like tidsforløp i de tre tilfellene. På Figur 5.8 er simuleringsresultatene for $\gamma = 15.95$ vist. Referansetrajektoren η_{x_d} og forstyrrelsen f_i er som tidligere vist i underkapittel 4.3.

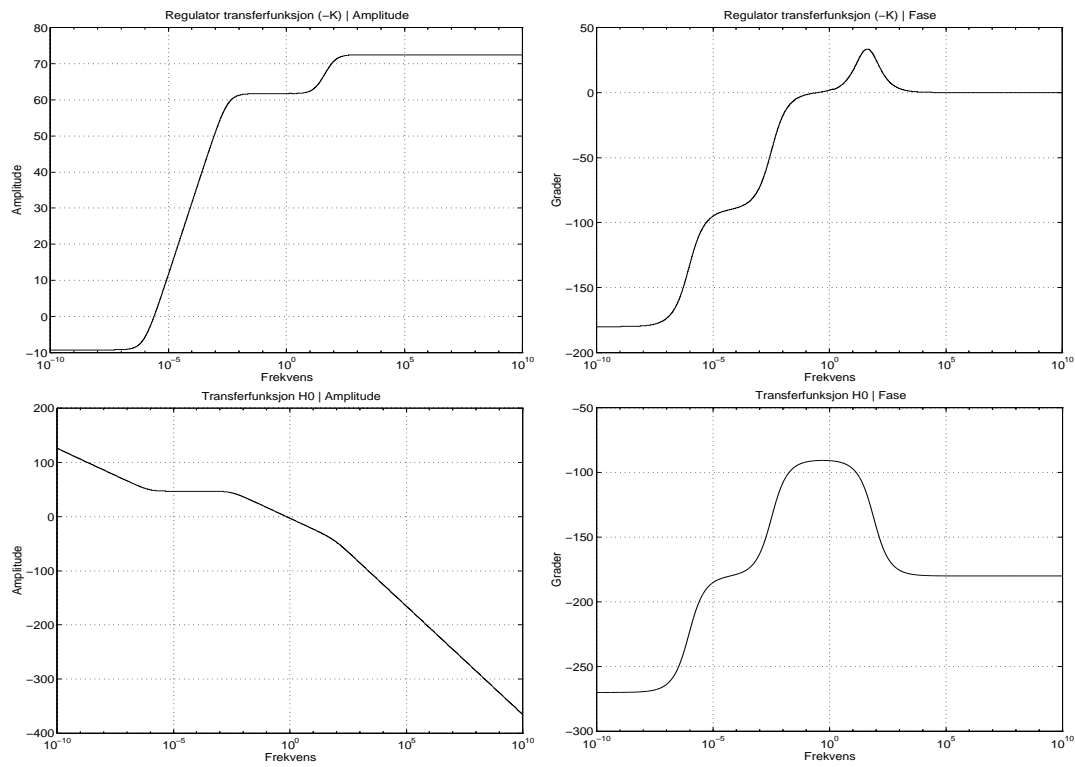
Simuleringer ved bruk av den ulineære modellen viser likt tidsforløp for kabeltilstanden, og at denne er som i det lineariserte tilfellet, mens det er forskjell på de andre resultatene oppnådd ved de forskjellige gammaverdiene. Best resultat gir bruken av $\gamma = 15.95$. På Figur 5.9 ser vi hvordan pådrag og posisjon blir i



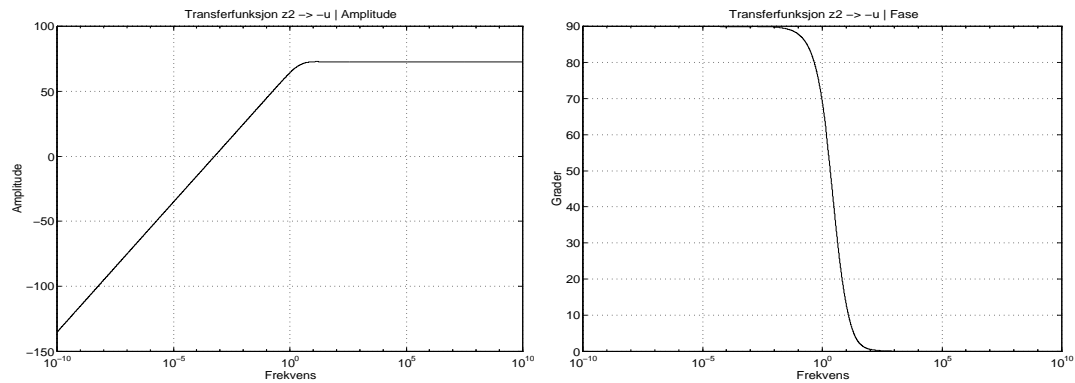
Figur 5.4: Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 15.9$.



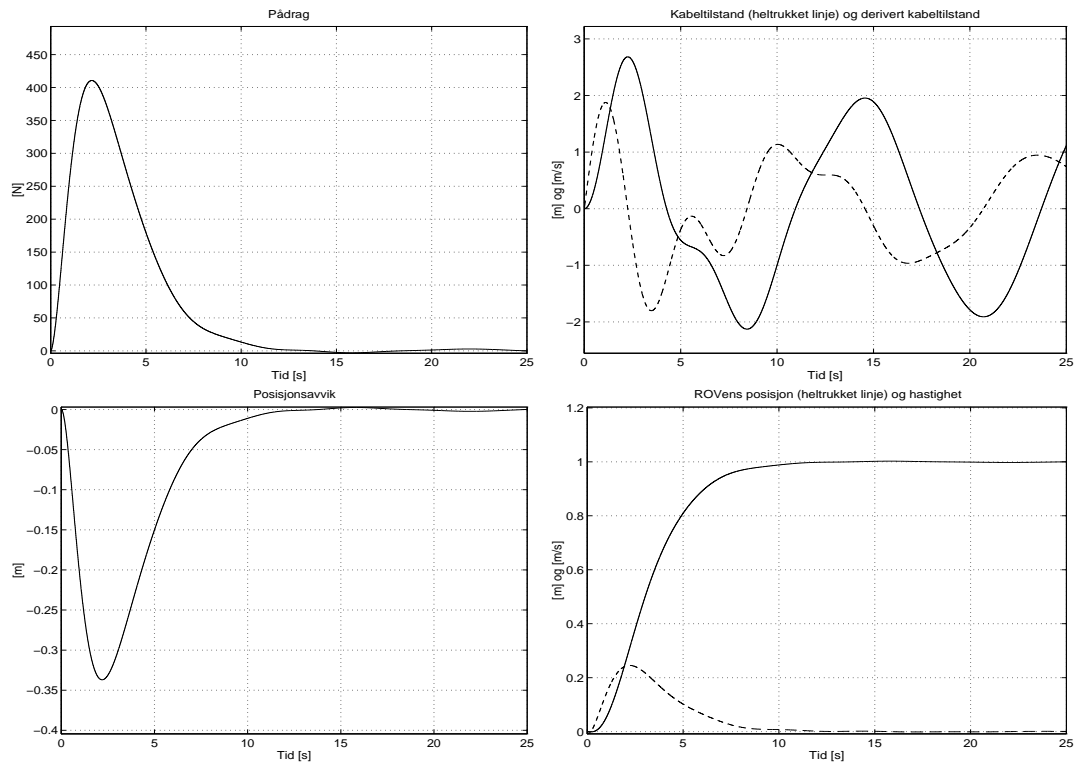
Figur 5.5: Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 15.95$.



Figur 5.6: Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 16$.

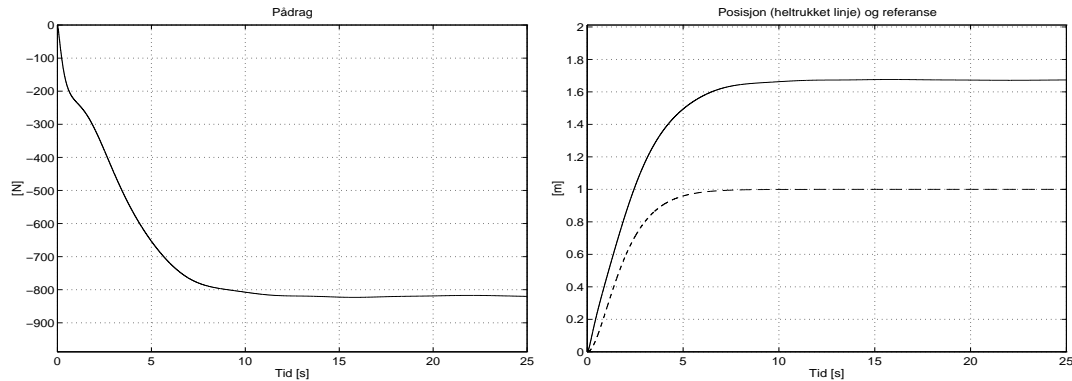


Figur 5.7: Transferfunksjonen T_{-uz_2} .

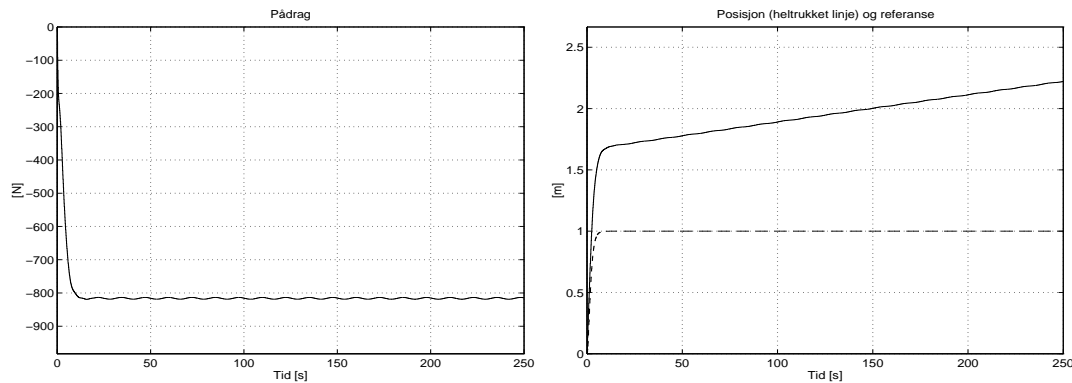


Figur 5.8: Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den lineariserte modellen.

med bruk av denne verdien, mens på Figur 5.10 og 5.11 ser vi resultatene for henholdsvis $\gamma = 15.9$ og $\gamma = 16$. Merk at tiden det simuleres over er økt kraftig i de to siste tilfellene.



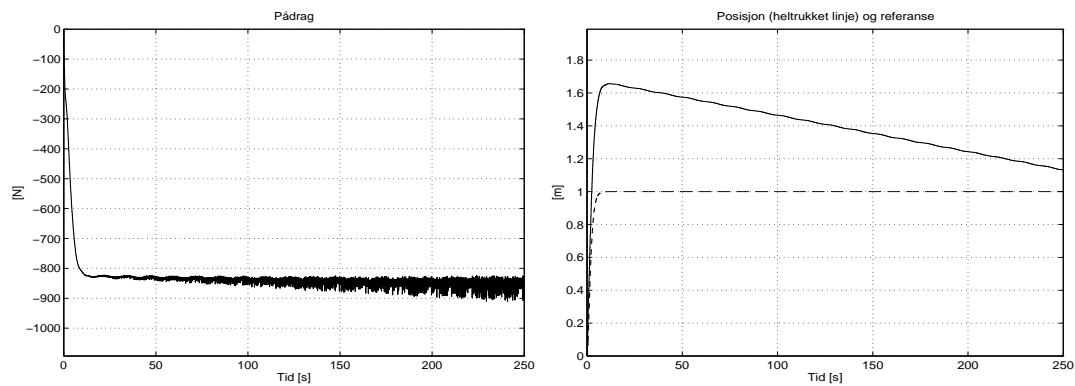
Figur 5.9: Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 15.95$.



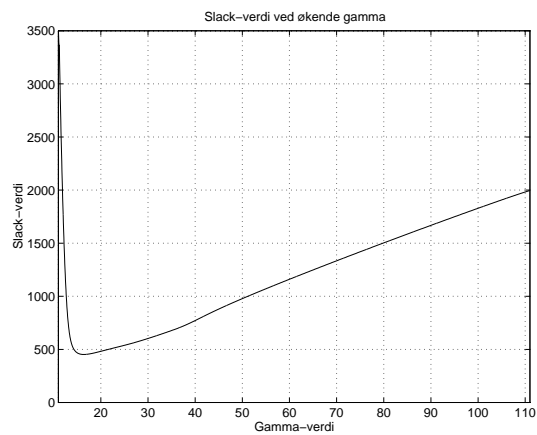
Figur 5.10: Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 15.9$.

Gammaverdiene som til nå har vært studert er valgt med utgangspunkt i visuell studie av transferfunksjoner, tidssimuleringer og slack-verdi. Ønsket var å senke slack-verdien mest mulig, samtidig som transferfunksjonen \mathbf{T}_{-uzw} holdes passiv og tidssimuleringen gav akseptable resultater. At disse resultatene virkelig gir en \mathcal{H}_∞ -norm som er lavere enn gammaverdien kan sjekkes i Matlab ved bruk av `hinfnorm`.

Ved å foreta jevne endringer av gammaverdien kan vi få en oversikt over hva som skjer med de forskjellige parametrene. Figur 5.12 viser slack-verdien ved økende gammaverdi fra 11 til 111, med endring i steg på 0.05.

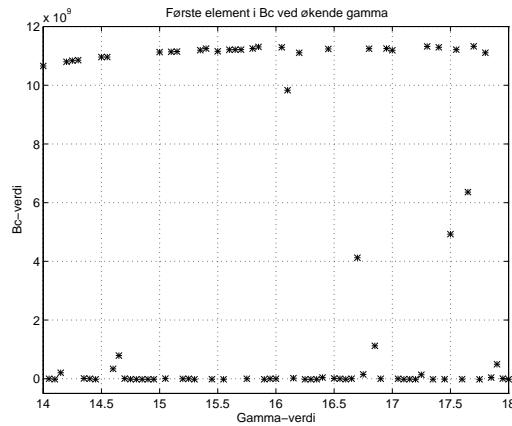


Figur 5.11: Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 16$.



Figur 5.12: Slack-verdi ved jevnt økende verdier for γ .

Vi legger merke til at endringene i slack-verdien er jevne, mens Figur 5.13 viser hvordan små endringer i gammaverdi gir store utslag i parametrene til \mathbf{B}_c . Denne figuren viser det første elementet i \mathbf{B}_c , men tilsvarende har vi også store endringer i $\bar{\mathbf{P}}$ som framkommer etter det andre steget i løsningsprosedyren.



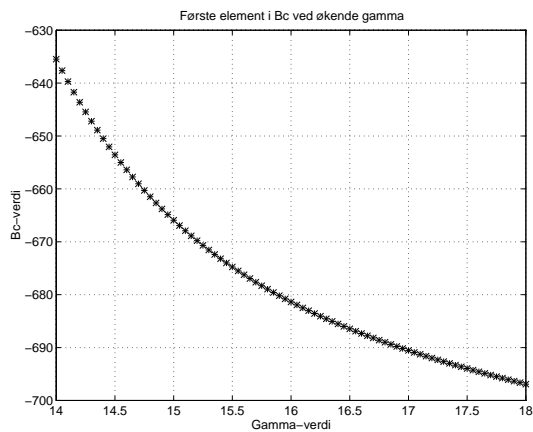
Figur 5.13: Første verdi i \mathbf{B}_c ved økende verdier for γ .

5.3.2 Fast γ og uendret BIGM

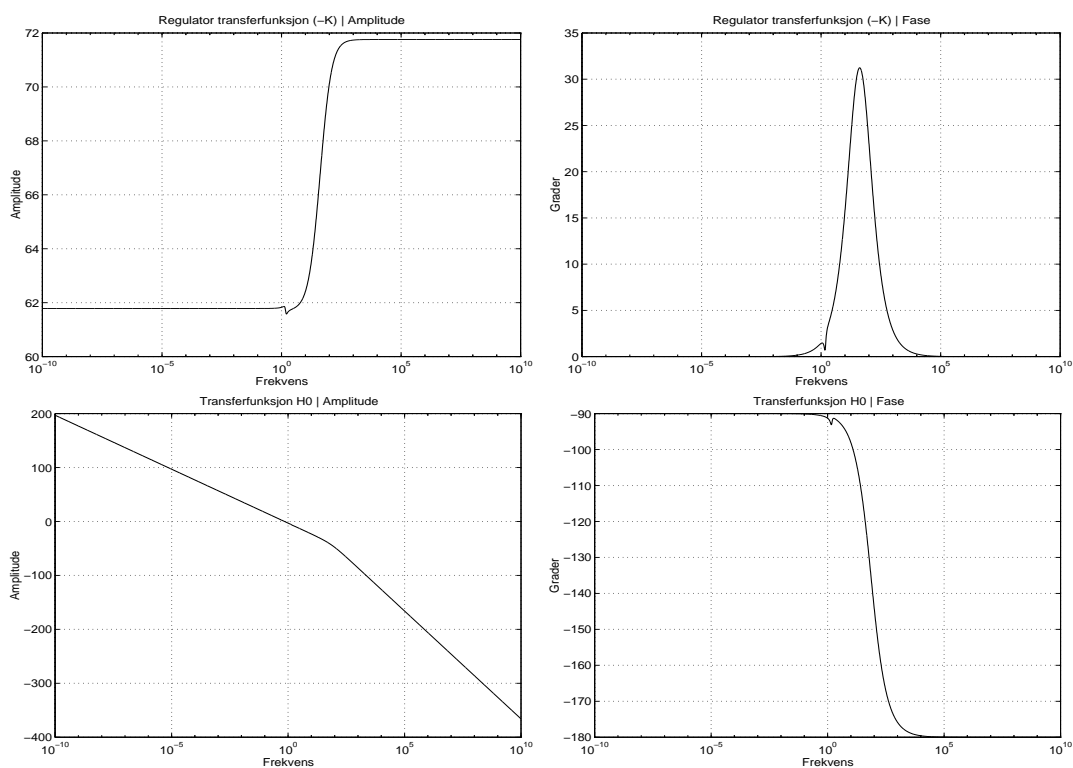
I forrige underkapittel så vi hvordan resultatene ble med en egendefinert utgave av sdpsol-variabelen BIGM. Dersom vi lar være å endre denne variabelen genereres en advarsel i sdpsol, som forteller oss at resultatene kan være feilaktige. Ignorerer vi denne advarselen vil vi derimot se at problemet med store forandringer i løsningens parametre, ved små endringer i gammaverdi, er forsvunnet. Figur 5.14 viser hvordan små endringer i gammaverdi nå ikke får slike store utslag i parametrene til \mathbf{B}_c som vi hadde i Figur 5.13 i forrige underkapittel.

Simuleringsresultatene i Simulink bedres også for den ulineære modellen. Som et eksempel på dette kan vi velge en av de gammaverdiene fra forrige underkapittel som ikke gav fast posisjonsavvik, og se hva resultatet blir ved uendret BIGM. $\gamma = 16$ gir en slack-verdi på 546.398, og transferfunksjonene vist på Figur 5.15. Simulering i Simulink gir tidsresponsen vist i Figur 5.16.

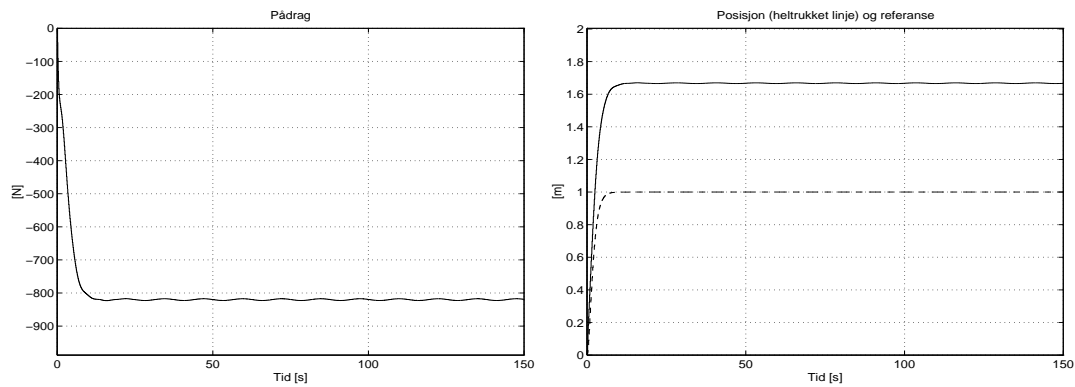
Fortsatt vil tilbakekoblingen være passiv, som vi kan se av Figur 5.17.



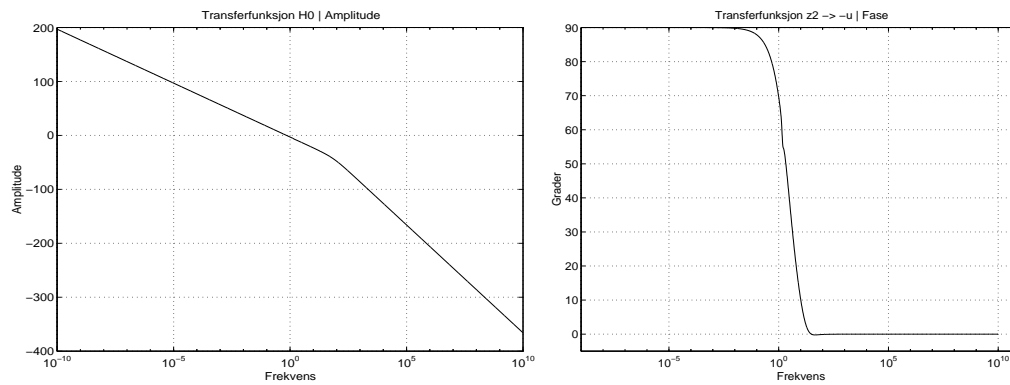
Figur 5.14: Første verdi i B_c ved økende verdier for γ . (Uendret BIGM.)



Figur 5.15: Resulterende transferfunksjoner ved bruk av $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)



Figur 5.16: Simuleringsresultater i Simulink ved anvendelse av den ulineære modellen og $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)



Figur 5.17: Transferfunksjonen T_{-uz_2} for $\gamma = 16$. (Uendret BIGM.)

Kapittel 6

Diskusjon og konklusjon

Forrige kapittel gav et omfattende materiale av simuleringsresultater som jeg nå ønsker å se litt nærmere på. Ved å forsøke å gi en litt mere generell tolkning av resultatene vil jeg til slutt gi en form for konklusjon på oppgavens hovedelementer.

6.1 Diskusjon av simuleringsresultater

Som nevnt i teoribakgrunnen omkring bruk av matriseulikheter for spesifisering av krav til regulatorstruktur (underkapittel 3.3), ender vi opp med tilstrekkelige krav. Dette gjør at vi vil ha konservatisme i spesifiseringen av regulatoren, og dermed en mulig løsning uten at kravene strengt tatt er oppfylte. I to-skritts-metoden som anvendes vil spesielt kravet til ESPR transferfunksjonsmatrise \mathbf{T}_{-uz_2} være streng, da vi egentlig kan greie oss med krav til at den skal være positiv reell (passiv). Bruken av en slack-variabel gjør at kravet til ESPR transferfunksjon blir brutt, men vi kan fortsatt ha oppfylt krav til ren passivitet. Dette kan vi se stemmer fra Figur 5.7 og Figur 5.17, der fasen holder seg i området $[90^\circ, -90^\circ]$.

6.1.1 Fast γ og egendefinert BIGM

Resultatene er gode ved bruk av den lineariserte modellen for simulering i Simulink. Vi ser at posisjonsavviket holdes lavt og at kabelens svingninger holdes dempet omkring null. Vi får derimot varierende resultater ved bruk av den ulineære modellen, selv om kabelsvingningene blir de samme. Forskjellen mellom disse to modellene ligger i det ulineære leddet $d_2(\dot{\eta}_x - U_{c_l})|\dot{\eta}_x - U_{c_l}|$, som lineariseres omkring $\dot{\eta}_x = 0$. Ved lave frekvenser ($\dot{\eta}_x \rightarrow 0$) vil den ulineære modellen gi et tilleggsledd på $-d_2 U_{c_l}^2$. Denne konstante forstyrrelsen vil ikke regulatoren kompensere for, siden vår regulator ikke inneholder integralvirkning, og vi får et konstant avvik. Dette kan vi se i Figur 5.9.

I tilfellet med bruk av $\gamma = 16$ ser vi at regulatoren ikke fungerer ved overgangen fra den lineariserte modellen til den ulineære. Grunnen til dette kan vi se av regulatorens amplitude på Figur 5.6, som viser at forsterkningen er lavere enn 0 dB ved lave frekvenser. Regulatoren vil med andre ord ikke fungere idet hastigheten går mot null, slik vi ser av simuleringen i Simulink på Figur 5.11. Tilsvarende ser vi at $\gamma = 15.9$ også gir dårlig regulering ved lave frekvenser.

Ved egendefinert BIGM ble verdien satt til 10^{10} . Dette gjorde at små endringer i gammaverdien fikk store utslag i parameteren \bar{P} og dermed også B_c som vist på Figur 5.13. Dette vil påvirke regulatorens parametre, og kan være med på å forklare hvorfor vi får slike forskjeller i simuleringsresultatene med endring av gammaverdien fra 15.9 til 15.95, og til slutt til 16.

Plottet av slack-variabelen viser at området vi arbeider i er egnet. Figur 5.12 viser at området med laveste slack-verdier ligger ved gammaverdi lavere enn 20.

Alle simuleringene ble utført for svingemodi $i = 1$, men dette vil være den dominerende svinemodien i systemet. Resultatene er også uten målestøy, men man kan merke seg at regulatoren er konstruert for et system med slik støy.

6.1.2 Fast γ og uendret BIGM

Fra brukerveiledningen til sdpsol (Shao-Po Wu & Stephen Boyd, 1996) finner vi at BIGM i utgangspunktet er satt til å være $10^3 \kappa$, der $\kappa \approx \max_{i \in [1, \dots, m]} \|\mathbf{F}_i\|$. Her er \mathbf{F}_i hentet fra uttrykket gitt i ligning (B.1), slik at BIGM avhenger av størrelsen på matrisene som anvendes i LMIene. Dermed kan BIGM variere i motsetning til min egendefinerte verdi som var konstant. Uten endring vil sdpsol generere en advarsel om at resultatet som oppnås kan være feilaktig, men som vi har sett av resultatene får vi i dette tilfellet små endringer i parametrene med små endringer i gammaverdi. B_c endres jevnt, som vist på Figur 5.14, og ikke i store sprang som tidligere. Av resultatene ser vi hvordan dette gjør at tidligere dårlige resultater med bruk av $\gamma = 16$ nå forbedres kraftig, med bedre regulatorforsterkning ved lave frekvenser (Figur 5.15) og akseptable simuleringsresultater i Simulink ved bruk av den ulineære modellen (Figur 5.16).

6.2 Konklusjon og forslag til videre arbeid

Denne oppgaven har presentert endel eksisterende metoder for syntese av passivitetsbaserte regulatorer, og deretter tatt utgangspunkt i en av disse til bruk på et mekanisk oscillatorisk system bestående av skip, stigerør og undervannsfarkost.

Metoden anvender numerisk optimaliseringsprogram (sdpsol) for å finne en løsning som oppfyller tilstrekkelige betingelser, uttrykt ved lineære matriseulikheter. Vi

har sett hvordan en løsning kan eksistere selv om disse tilstrekkelige betingelsene strengt tatt ikke er oppfylt, ved at vi har tatt i bruk en slack-variabel for å gjøre kravet til utvidet streng positiv reell tilbakekobling fra virtuell måling til pådrag litt mindre strengt. Resultatet er positiv reell tilbakekobling slik vi ønsker.

Regulatorsyntesen som ble anvendt viste seg å være et godt alternativ for vårt oscillatoriske system. Spesielt siden vi måler undervannsfarkostens posisjon, mens vi har passivert i systemet fra pådrag til hastigheten. Syntesemetoden brukt gir oss mulighet til å anvende informasjonen i dette passive systemet ved å konstruere en virtuell måling av hastigheten.

Resultatene fra simulering i Matlab viste hvor stor betydning små justeringer i den numeriske optimaliseringen kan ha å si for resultatet. Et videre arbeid bør inkludere mere innsikt i hvordan den numeriske optimaliseringen fungerer, da dette til syvende og sist er det kritiske punktet i regulatorsyntesen.

Andre momenter som bør vurderes ved et videre arbeid er:

- Optimalisering av gamma, ved gi en mulighet for at gamma kan endre seg i den numeriske optimaliseringen.
- Finne en årsak til at man behøver en slack-variabel for å kunne gjennomføre den numeriske optimaliseringen.
- Andre muligheter for å gjøre matriseulikhetene i to-skritts-metoden løsbare ved overgangen fra første til andre steg. Med andre ord forsøke noe annet enn transformeringen av tilstandsvektoren. En mulighet vil kanskje være å anvende Q fra første steg som en konstant i andre steg, uten å utføre transformasjonen. Bruk av en slik konstant matrise ville forenklet leddene i matriseulikhetene.
- Ved å anvende en “ytre” iterasjonssløyfe kan man studere andre krav enn ved bruk av matriseulikhetene. Dersom f.eks. regulatorstrukturen som oppnås sjekkes etter den numeriske optimaliseringen, kan man studere forsterkningen ved lave frekvenser for deretter å gjenta optimaliseringen med bruk av en annen gammaverdi.

Referanser

- Brian D. O. Anderson & John B. Moore (1989). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Prentice-Hall.
- Carsten W. Scherer, Pascal Gahinet & Mahmoud Chilali (1995). Multi-objective output-feedback control via lmi optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*. Submitted.
- Egeland, O. (1991). Bevegelsesligninger for romskip med konsentrert og distribuert elastisitet. Notat.
- Egeland, O. (1993). *Servoteknikk*, Tapir Forlag.
- Fossen, T. I. (1994). *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, John Wiley & Sons.
- Johannessen, E. A. (1995). Synthesis of passive controller with \mathcal{H}_∞ . Working note.
- Johannessen, E. A. (1996). Synthesis of \mathcal{H}_∞ controller with constraints, Submitted to the 1997 American Control Conference.
- John C. Doyle, Keith Glover, Pramod P. Khargonekar & Bruce A. Francis (1989). State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(8): 831–847.
- Khalil, H. K. (1992). *Nonlinear Systems*, Macmillan.
- Kreyszig, E. (1988). *Advanced Engineering Mathematics*, sixth edn, John Wiley & Sons.
- Michael Green & David J. N. Limebeer (1995). *Linear Robust Control*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Prentice-Hall.
- Pascal Gahinet & Pierre Apkarian (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **4**: 421–448.

- Scherer, C. W. (1995). From single-channel lmi analysis to multi-channel mixed lmi synthesis: a general procedure, *Selected Topics in Identification, Modeling and Control* **8**.
- Schjølberg, I. (1996). *Modeling and Control of Underwater Robotic Systems*, PhD thesis, Norges Tekniske Høgskole (NTH).
- Shao-Po Wu & Stephen Boyd (1996). *A Parser/Solver for Semidefinite Programming and Determinant Maximization Problems with Matrix Structure*. User's Guide, Version Beta.
- Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron & Venkataramanan Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, number 15 in *SIAM Studies in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia.
- Strang, G. (1988). *Linear Algebra and Its Applications*, third edn, Harcourt Brace Jovanovich.

Vedlegg A

Passivitet

I boken Egeland (1993) gis en introduksjon til bruk av energibetraktninger for å studere et systems stabilitetsegenskaper. Dette gjør at begrepet *passivitet* blir introdusert, med en innføring i hvordan man kan studere systemers passivitetsegenskaper. Essensen i dette blir også presentert i boken Fossen (1994).

Dersom vi ser på et system med pådrag \mathbf{u} og måling \mathbf{y} , og antar en totalenergi $V(t)$ større eller lik null, vil systemet være passivt hvis energien $V(T)$ ved tidspunkt $T \geq 0$ oppfyller

$$V(T) \leq V(0) + \int_0^T \mathbf{y}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

Her er $V(0)$ initialverdien i systemet, mens integralet uttrykker tilført energi utenfra. Ved å anvende slike energibetraktninger kan man påvise stabilitet for passive systemer.

A.1 Definisjoner og nyttige resultater

De grunnleggende definisjonene av passivitet og streng passivitet er:

Definisjon A.1 (Passivitet) *Et system med pådrag \mathbf{u} og måling \mathbf{y} er passivt hvis det eksisterer en konstant β , slik at*

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \geq \beta \quad , \forall T \geq 0 \text{ og } \forall \mathbf{u} \quad (\text{A.2})$$

Definisjon A.2 (Streng Passivitet) *Et system med pådrag \mathbf{u} og måling \mathbf{y} er*

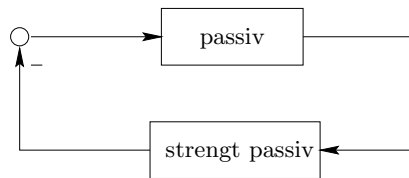
strengt passivt hvis det eksisterer en konstant β og en konstant $\delta > 0$, slik at

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \geq \beta + \delta \int_0^T \mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad , \forall T \geq 0 \text{ og } \forall \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

Ved passive systemer vil vi kunne finne følgende sammenheng:

- Parallellkobling av passive systemer er passiv.
- Et sammensatt system bestående av et passivt system med et passivt system i tilbakekoblingen er passivt.

Fra passivitetsteorien har vi at et passivt system, med et strengt passivt system i tilbakekoblingen, er asymptotisk stabilt. Dette er skissert på Figur A.1.



Figur A.1: Asymptotisk stabilt totalsystem.

Ofte er det slik at passivitet er en strukturell egenskap ved systemet, og ikke er avhengig av prosessmodellens parametre. Dette gjør at selv om det er stor usikkerhet eller store variasjoner i parametrene vil man kunne studere passivitetsegenskapene, og dermed kunne påvise stabilitet.

Et nyttig resultat ved SISO¹ systemer er følgende teorem:

Teorem A.1 Gitt et LTI system med rasjonal transferfunksjon $h(s)$ definert ved $y(s) = h(s)u(s)$. Anta at alle polene til $h(s)$ ligger i det åpne venstre halvplan, da gjelder:

- Systemet er passivt $\Leftrightarrow |\angle h(j\omega)| \leq 90^\circ$ for alle ω
- Systemet er strengt passivt $\Rightarrow |\angle h(j\omega)| < 90^\circ$ for alle ω

A.2 Positiv reelle systemer

Det er en nær sammenheng mellom passivitet og begrepet *positiv reell (PR)*. For MIMO² systemer med transferfunksjonsmatrisen $\mathbf{H}(s)$ har vi (Khalil, 1992):

¹Single Input Single Output

²Multiple Input Multiple Output

Definisjon A.3 (Positiv Reell) $\mathbf{H}(s)$ kalles *positiv reell* dersom:

- $\mathbf{H}(s)$ har elementer som er anlytisk i $\text{Re}(s) > 0$
- $\mathbf{H}^*(s) = \mathbf{H}(s^*)$, for $\text{Re}(s) > 0$
- $\mathbf{H}^T(s^*) + \mathbf{H}(s) \geq 0$, for $\text{Re}(s) > 0$

Her står * for kompleks konjugert.

Et annet viktig begrep er *streng positiv reell (SPR)*, som defineres på følgende måte:

Definisjon A.4 (Streng Positiv Reell) $\mathbf{H}(s)$ kalles *streng positiv reell* dersom $\mathbf{H}(s - \epsilon)$ er positiv reell for $\epsilon > 0$.

Begrepet *utvidet streng positiv reell (ESPR³)* defineres slik:

Definisjon A.5 (Utvidet Streng Positiv Reell) $\mathbf{H}(s)$ kalles *utvidet streng positiv reell* dersom den er analytisk i $\text{Re}(s) > 0$ og

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^T(-j\omega) > 0 \quad , \forall \omega \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Sammenhengen mellom passive systemer og positiv reelle systemer kan oppsummeres slik:

- Et positivt reelt eller strengt positivt reelt kausalt system vil være passivt.
- Et utvidet strengt positivt reelt system vil være strengt passivt.

For å finne ut om et system er positivt reelt eller strengt positivt reelt vil følgende lemma være nyttig:

Lemma A.1 (Kalman-Yakubovich Lemma) *Gitt et kontrollerbart lineært tidsinvariant system:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\text{A.6})$$

med transferfunksjonsmatrise

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (\text{A.7})$$

³Extended Strictly Positive Real

Systemet vil være strengt positivt reelt hvis, og bare hvis, det eksisterer to positiv definite matriser $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ og $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, slik at

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{C} \quad (\text{A.9})$$

Dersom \mathbf{Q} i stedet tilfredsstiller betingelsen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, sies systemet å være positivt reelt.

Vedlegg B

Lineære matriseulikheter

Boken Stephen Boyd et al. (1994) gir en generell innføring i emnet lineær matriseulikheter (LMI¹). Her pekes det på hvordan mange av problemene innenfor reguleringsteorien kan reduseres til noen få standard konvekse eller kvasikonvekse optimaliseringsproblemer, som innebærer bruk av LMier. Slike problemer kan i dag løses effektivt ved hjelp av numeriske metoder. LMI er nært knyttet til Lyapunov-teori, som kan sees på som en forgjenger og et spesialtilfelle av moderne LMI-teori.

En lineær matriseulikheter kan skrives på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > 0, \quad (\text{B.1})$$

hvor

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ er en vektor med ukjente skalare (variable).
- \mathbf{F}_i er gitte symmetriske matriser.
- Ulikheten angir at $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ skal være positiv definit.

Ved diagonale \mathbf{F}_i får vi fra dette et sett med lineære ulikheter.

Dersom det eksisterer flere LMier, $\mathbf{F}^{(1)}(x) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(x) > 0$, kan disse uttrykkes som en LMI ved

$$\text{diag}(\mathbf{F}^{(1)}(x), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(x)) > 0. \quad (\text{B.2})$$

¹Linear Matrix Inequality

Ulineære (konvekse) ulikheter kan konverteres til LMI-form ved å anvende *Schur komplement*:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \mathbf{Q}(x)^T, \\ \mathbf{R}(x) &= \mathbf{R}(x)^T > 0, \\ \mathbf{Q}(x) - \mathbf{S}(x)\mathbf{R}(x)^{-1}\mathbf{S}(x)^T &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

er ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}(x) & \mathbf{S}(x) \\ \mathbf{S}(x)^T & \mathbf{R}(x) \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{B.4})$$

B.1 Beskrivelse av \mathcal{H}_2 - og \mathcal{H}_∞ -norm ved bruk av LMI

Vi antar at vi har følgende LTI system Σ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (\text{B.6})$$

For dette systemet finner vi følgende transfermatrise fra pådraget \mathbf{u} til målingen \mathbf{y} :

$$\mathbf{T}_{yu} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (\text{B.7})$$

For å karakterisere \mathcal{H}_2 -normen ved bruk av matriseulikheter kan vi anvende følgende lemma (Pascal Gahinet & Pierre Apkarian, 1994):

Lemma B.1 \mathbf{A} er eksponensielt stabil og $\|\mathbf{T}_{yu}\|_2^2 < \alpha$, hvis, og bare hvis, $\mathbf{D} = 0$ og det eksisterer en $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0$, slik at

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{X} < 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}^T) < \alpha. \quad (\text{B.9})$$

Alternativt kan vi definere en tilleggsvariabel \mathbf{Z} og få følgende (Scherer, 1995):

Lemma B.2 \mathbf{A} er eksponensielt stabil og $\|\mathbf{T}_{yu}\|_2^2 < \alpha$, hvis, og bare hvis, $\mathbf{D} = 0$ og det eksisterer symmetriske matriser \mathbf{X} og \mathbf{Z} med $\text{trace}(\mathbf{Z}) < \alpha$, slik at

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} & \mathbf{X}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{X} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{B.10})$$

Tilsvarende kan vi karakterisere \mathcal{H}_∞ -normen ved bruk av følgende lemma (Pascal Gahinet & Pierre Apkarian, 1994):

Lemma B.3 (Bounded Real Lemma) A er eksponensielt stabil og $\|T_{yu}\|_\infty < \gamma$, hvis, og bare hvis, det eksisterer en $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T > 0$, slik at

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} & \mathcal{X} \mathcal{B} & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \mathcal{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0. \quad (\text{B.11})$$

B.2 Beskrivelse av passivitet ved bruk av LMI

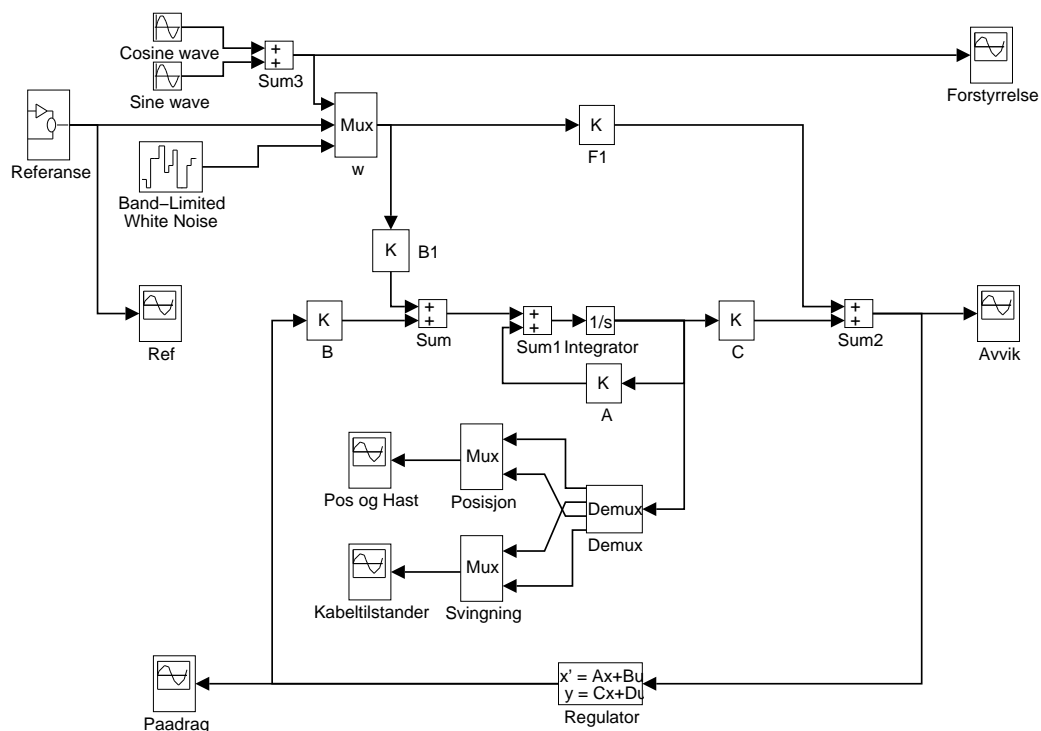
Dersom systemet Σ tilfredsstillter krav til *utvidet streng positiv reell (ESPR)* vil systemet være strengt passivt. En karakterisering av ESPR system i form av LMI kan gis ved bruk av følgende lemma (Scherer, 1995):

Lemma B.4 T_{yu} er ESPR hvis, og bare hvis, det eksisterer en matrise $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T > 0$, slik at

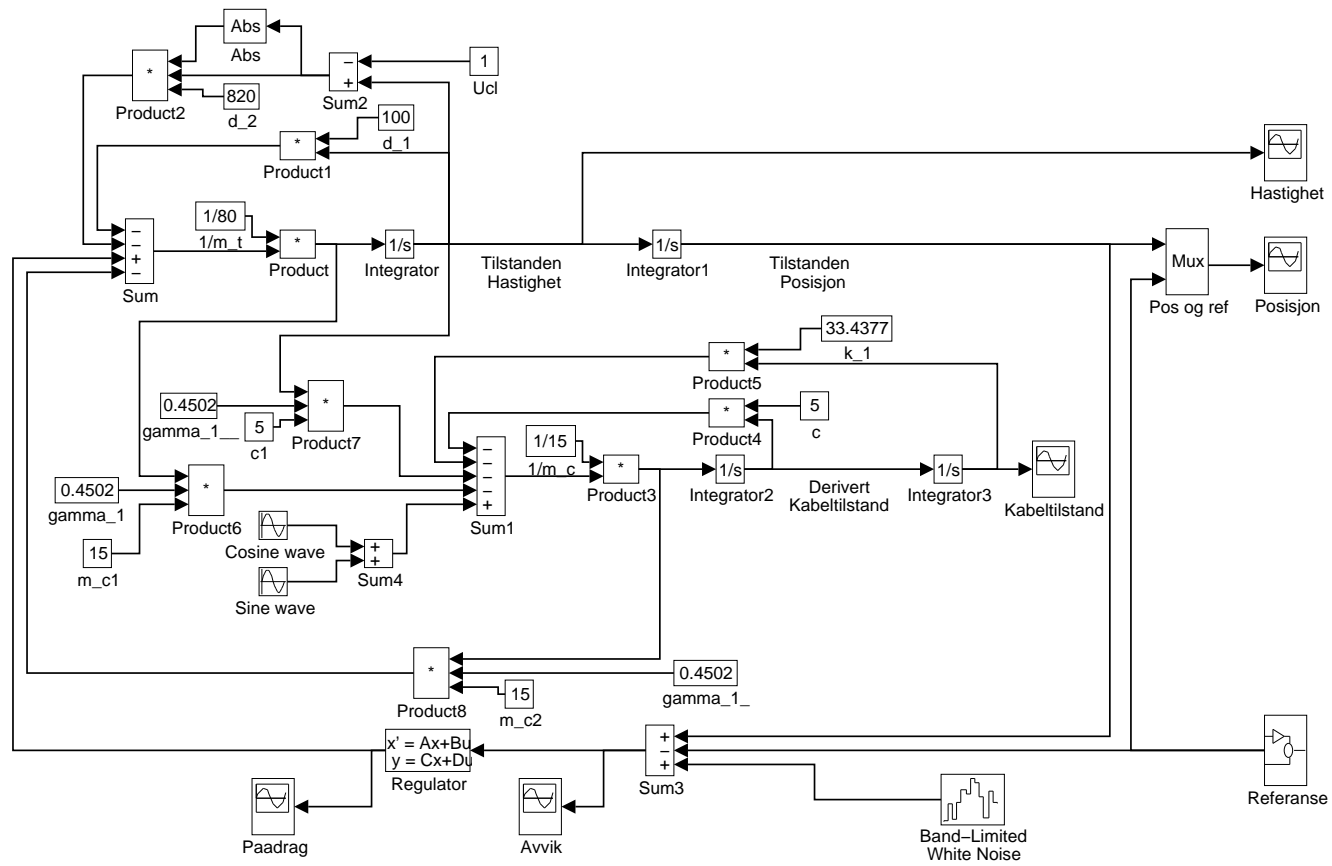
$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} & \mathcal{X} \mathcal{B} - \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \mathcal{X} - \mathcal{C} & -\mathcal{D} - \mathcal{D}^T \end{pmatrix} < 0. \quad (\text{B.12})$$

Vedlegg C

Blokkskjema brukt i Simulink



Figur C.1: Blokkskjema for simulering av det lineariserte systemet i Simulink.



Figur C.2: Blokkskjema for simulering av det ulineære systemet i Simulink.

Vedlegg D

Matlab-kode

58

kab_rov.m

```
function [A, B1, B, C1, D11, E1, C, F1] = kab_rov(j)

% Denne funksjonen anvendes for å beregne tilstandsrommodellen, fra
% den matematiske modellen i Schjølbjergs avhandling (Kap. 4),
% for en kabel, hengende fra et skip, med en ROV i enden.
%
% Utgangspunktet er modellen:
%
%      . . .
%      M_t * x  + D_l1 * x + K_t * x = u + f
%
% Med utgangspunkt i den valgte svingemodi 'j' beregnes følgende
% tilstandsrommodell:
%
%      . . .
%      x = A*x + B1*w + B*u
%      z_1 = C1*x + D11*w + E1*u
%      y = C*x + F1*w
%
% her er x = (n_x, q_j, n_x, q_j) og w = (f_j, n_xd, w_m).
%
% Notasjon: [A, B1, B, C1, D11, E1, C, F1] = kab_rov(j).

% Konstanter gitt i avhandlingens Appendix B
m_t = 80;      % kg
m_c = 15;     % kg/m
l = 600;      % m
EI = 4e9;     % Nm^2

T = 1.11e6;   % N
c = 5;        % Ns/m^2
d_1 = 100;
U_cl = 1;     % m/s
C_m = 1;
C_D = 1.6;
D_0 = 0.1;   % m
A = 1;        % m^2
ro = 1025;    % kg/m^3
zeta_a = 1;   % m
omega_n = 0.5; % Hz
C_1 = 40;

% Konstanten d_2 er ikke gitt i Appendix B, men finner en
% verdi ut fra det som står på s.14
d_2 = 0.5*ro*C_D*A;

% Konstant som anvendes ved normalisering
a_j = 1;

% Generelt for svingemodi 'j'
n_j2 = (j*pi)/l;
A_j3 = sqrt(2*a_j/l);
gamma_j = (-1)^(j+1) * A_j3 * 1/(a_j*n_j2);
k_j = ((j*pi)/l)^2 * (EI*((j*pi)/l)^2 + T);

% Matriser i den matematiske modellen
M_t = [m_t gamma_j*m_c; gamma_j*m_c m_c];
```

```

D_1 = [d_1+2*d_2*u_cl 0; gamma_j*c c];
K_t = [0 0; 0 k_j];

% Matriser i tilstandsrommodellen
A = [];
A(1:2,1:2) = zeros(2);
A(1:2,3:4) = eye(2);
A(3:4,1:2) = -inv(M_t)*K_t;
A(3:4,3:4) = -inv(M_t)*D_1;
B1 = [];
B1(1:2,1) = zeros(2,1);
B1(1:2,2:3) = zeros(2);
B1(3:4,1) = inv(M_t)*[0; 1];
B1(3:4,2:3) = zeros(2);
B = [];
B(1:2,1) = zeros(2,1);
B(3:4,1) = inv(M_t)*[1; 0];
C1 = [1 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 0];
D11 = [0 -1 0; 0 0 0; 0 0 0];
E1 = [0; 0; 1];
C = [1 0 0 0];
F1 = [0 -1 1];

% Vektmatriser
% Dette bestemmer hvor mye tilstander og pådrag skal vektlegges
% i H-uendelig normen.
vekt_n_x = 10;
vekt_ndot_x = 10;
vekt_n_xd = 10;
vekt_u = 1e-3;
KC1 = diag([vekt_n_x, vekt_ndot_x, 1]);
KD11 = diag([vekt_n_xd, 1, 1]);
KE1 = diag([1, 1, vekt_u]);

% Nye, vektete matriser, i uttrykket z_1 = C1*x + D11*w + E1*u
C1 = KC1*C1;
D11 = KD11*D11;
E1 = KE1*E1;

```

regu_pas.m

```

%
% Syntese av passiv H-uendelig regulator.
%
% Kaller først funksjonen 'kab_rov', og får returnert en
% tilstandsrommodell for skip, kabel og ROV.
%
% Deretter kalles en ny funksjon som anvender SDPSOL for å
% finne en regulator med krav til H-uendelig normen for
% transferfunksjonsmatrisen fra w til z_1, og i tillegg
% krav til at transferfunksjonsmatrisen fra z_2 til -u
% skal være passiv.
%

```

```

% $ Modified: Tue Dec 10 13:41:42 1996 by alund $
%
clear all;

svingemodi = input('Skriv inn svingemodi: ');
gamma_gitt = input('Skriv inn gammaverdi: ');

% Henter tilstandsrommodell
[A, B1, B, C1, D11, E1, C, F1] = kab_rov(svingemodi);

% Definerer virtuell utgang
% Denne er gitt ved: z_2 = C2*x, der x = (n_x, q_i, n_x, q_i)
C2 = [0 0 1 0];

% Finner systemmatriser for henholdsvis Regulator, kanalen fra w til z_1
% og kanalen fra z_2 til -u:
[Ac, Bc, Cc, Dc, Acl, Bcl, Ccl, Dcl, Acl_hat, Bcl_hat, Ccl_hat, Dcl_hat, ...
 gam_opt, s1, INFO, Q_hinf, P_hinf, P_pas] = ...
 pas_reg(A, B1, B, C1, C2, D11, E1, C, F1, gamma_gitt);

```

pas_reg.m

```

function [Ac, Bc, Cc, Dc, Acl, Bcl, Ccl, Dcl, Acl_hat, Bcl_hat, Ccl_hat, ...
 Dcl_hat, gam_opt, s1, INFO, Q_hinf, P_hinf, P_pas] = ...
 pas_reg(A, B1, B, C1, C2, D11, E1, C, F1, gam)

% Denne funksjonen finner en passiv H-uendelig regulator på formen:
%
% (Ac Bc)
% K = ( )
% (Cc Dc)
%
% , slik at: x_c = Ac*x_c + Bc*y
%           u = Cc*x_c + Dc*y
%
% Anvender SDPSOL for å finne regulatoren, ved å spesifisere
% H-uendelig krav til transferfunksjonsmatrisen fra w til z_1,
% og krav til passivitet fra den virtuelle utgangen z_2 til
% pådraget u.
%
% $ Modified: Tue Dec 10 13:41:14 1996 by alund $
%
[n r1] = size(B1); % r1: dim(w)
[n r2] = size(B); % r2: dim(u)
[m1 n] = size(C1); % m1: dim(z_1)
[m2 n] = size(C); % m2: dim(y)

% Fjernes naar gamma optimaliseres
gam_opt = gam;

```

```

% Finner en H-uendelig regulator
SDPSOL_FILENAME = 'hinf_reg';
sdpsol

Q_hinf = Q;
P_hinf = P;

% Med utgangspunkt i H-uendelig regulatoren foretar vi en
% transformasjon av tilstandsvariable
A_bar = inv(sqrtm(Q))*A*sqrtm(Q);
B1_bar = inv(sqrtm(Q))*B1;
B_bar = inv(sqrtm(Q))*B;
C1_bar = C1*sqrtm(Q);
C2_bar = C2*sqrtm(Q);
C_bar = C*sqrtm(Q);

% Ny optimalisering, med passivitetskrav i tillegg til krav
% om H-uendelig norm
BIGM = 1e10;
SDPSOL_FILENAME = 'pas_reg';
sdpsol

P_pas = P_bar;

% Regner tilbake til regulatormatriser
M_bar = eye(n);
N_bar = (eye(n)-P_bar)';

Dc = D_hat_bar;
Cc = (C_hat_bar - Dc*C_bar)*inv(N_bar)';
Bc = inv(M_bar)*(B_hat_bar - P_bar*B_bar*Dc);
Ac = inv(M_bar)*(A_hat_bar - M_bar*Bc*C_bar - ...
    P_bar*B_bar*Cc*N_bar' - ...
    P_bar*(A_bar+B_bar*Dc*C_bar))*inv(N_bar)');

% Finner matriser i transferfunksjonen fra w til z_1

Acl = [A+B*Dc*C, B*Cc; Bc*C, Ac];
Bcl = [B1+B*Dc*F1; Bc*F1];
Ccl = [C1+E1*Dc*C, E1*Cc];
Dcl = [D11+E1*Dc*F1];

% Finner matriser i transferfunksjonen fra z_2 til -u

Acl_hat = [A+B*Dc*(C-C2), B*Cc; Bc*(C-C2), Ac];
Bcl_hat = [B*Dc; Bc];
Ccl_hat = [Dc*(C-C2), Cc];
Dcl_hat = Dc;

```

hinf_reg

```

% SDPSOL fil som brukes for å finne matriser som tilfredsstillter
% krav til H-uendelig norm for transferfunksjonsmatrisen fra
% w til z1.

```

```

%
% $ Modified: Tue Dec 10 13:38:51 1996 by alund $
%

% Variable som det skal finnes verdier til:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
variable P(n,n) symmetric;
variable Q(n,n) symmetric;

variable A_hat(n,n);
variable B_hat(n,m2);
variable C_hat(r2,n);
variable D_hat(r2,m2);

variable psi11(n+n,n+n);
variable psi21(r1+m1,n+n);
variable psi22(r1+m1,r1+m1);

% variable gam_opt;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Definerer av matrise som brukes i krav til H-uendelig norm for
% transferfunksjonsmatrisen fra w til z1:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
psi11 ==
[ A*Q + Q*A' + B*C_hat +(B*C_hat)', A_hat' + A + B*D_hat*C      ;
  A_hat + (A + B*D_hat*C)'      , P*A + A'*P + B_hat*C + (B_hat*C)' ];
psi21 ==
[ (B1 + B*D_hat*F1)', (P*B1 + B_hat*F1)' ;
  C1*Q + E1*C_hat      , C1 + E1*D_hat*C  ];
psi22 ==
[ -gam*eye(r1)      , (D11 + E1*D_hat*F1)' ;
  D11 + E1*D_hat*F1, -gam*eye(m1)      ];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% LMier som uttrykker H-uendelig kravene:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[ Q      , eye(n);
  eye(n), P      ] > 0;

[ psi11, psi21';
  psi21, psi22 ] < 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Uten optimaliseringskriterie vil bare en mulig løsning bli funnet.
% minimize OBJ = gam_opt;

```

pas_reg

```

% SDPSOL fil som brukes for å finne matriser som tilfredsstillter

```

```

% krav til H-uendelig norm (for transferfunksjonen fra w til z1),
% og samtidig har ESPR transferfunksjon fra z2 til -u.

%
% $ Modified: Tue Dec 10 13:40:17 1996 by alund $
%

% Variable som det skal finnes verdier til:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
variable P_bar(n,n) symmetric;

variable A_hat_bar(n,n);
variable B_hat_bar(n,m2);
variable C_hat_bar(r2,n);
variable D_hat_bar(r2,m2);

variable psi11_bar(n+n,n+n);
variable psi21_bar(r1+m1,n+n);
variable psi22_bar(r1+m1,r1+m1);

variable theta11(n+n,n+n);
variable theta21(r2,n+n);
variable theta22(r2,m2);

variable s1; % Slack variabel
% variable gam_opt;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Psi- og Theta-matrisene brukes i spesifiseringen av krav til
% H-uendelig norm og krav til ESPR:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
psi11_bar ==
[ A_bar + A_bar' + B_bar*C_hat_bar + (B_bar*C_hat_bar)',
  A_hat_bar' + A_bar + B_bar*D_hat_bar*C_bar;
  A_hat_bar + (A_bar + B_bar*D_hat_bar*C_bar)',
  P_bar*A_bar + A_bar'*P_bar + B_hat_bar*C_bar + C_bar'*B_hat_bar' ];
psi21_bar ==
[ (B1_bar + B_bar*D_hat_bar*F1)', (P_bar*B1_bar + B_hat_bar*F1)';
  C1_bar + E1*C_hat_bar          , C1_bar + E1*D_hat_bar*C_bar  ];

```

```

psi22_bar ==
[ -gam*eye(r1)          , (D11 + E1*D_hat_bar*F1)';
  D11 + E1*D_hat_bar*F1, -gam*eye(m1)      ];

theta11 ==
[ A_bar + A_bar' + B_bar*C_hat_bar + (B_bar*C_hat_bar)' -
  B_bar*D_hat_bar*C2_bar - (B_bar*D_hat_bar*C2_bar)',
  A_hat_bar' + A_bar + B_bar*D_hat_bar*C_bar - B_bar*D_hat_bar*C2_bar -
  (B_hat_bar*C2_bar)';
  A_hat_bar + (A_bar + B_bar*D_hat_bar*C_bar)' - (B_bar*D_hat_bar*C2_bar)' -
  B_hat_bar*C2_bar,
  P_bar*A_bar + A_bar'*P_bar + B_hat_bar*C_bar + (B_hat_bar*C_bar)' -
  B_hat_bar*C2_bar - (B_hat_bar*C2_bar)'];
theta21 ==
[ (B_bar*D_hat_bar)' + C_hat_bar - D_hat_bar*C2_bar,
  B_hat_bar' + D_hat_bar*C_bar - D_hat_bar*C2_bar ];
theta22 ==
  D_hat_bar + D_hat_bar';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% LMler som spesifiserer krav til H-uendelig norm og krav til ESPR:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P_bar > 1;

% Krav til H-uendelig norm for transferfunksjonsmatrisen fra w til z1:
[ psi11_bar, psi21_bar';
  psi21_bar, psi22_bar ] < 0;

% Krav til ESPR transferfunksjonsmatrise fra z2 til -u:
[ theta11, theta21';
  theta21, theta22 ] - s1 < 0;

% Krav til regulator
D_hat_bar < 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Ideelt sett ønsker vi at slack-verdien skal være null...
minimize OBJ = s1;

```